ELENA ALVES e MANUEL ALVES

ELEMENTOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA. PARTE II

* Continuidade de funções

* Cálculo diferencial

* Cálculo integral

* Séries numéricas

Maputo

Elena Alves[1] e Manuel Alves[2] "**Elementos de Análise Matemática. Parte II**"– Maputo: Escola Superior de Gestão e Tecnologia, 2004.– 207p.

A colectânea de exercícios aborda os temas sobre continuidade de função, cálculo diferencial e integral e séries numéricas. O presente trabalho destina-se aos estudantes dos cursos de Matemática, Ciências e Engenharias.

Referências bibliográficas: 6 títulos.

(ISBN)Número de registo: 01882/RLINLD/2002

Tiragem: 500

Revisão: Prof. Doutor A. I. Elisseev e Prof. Doutor A. I. Kalashnikov

Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

[1]Prof$^{\mathrm{a}}$. Doutora E. V. Alves é Mestrada (Universidade Estatal de Saint-Petersburg) e Doutorada (Universidade Estatal de Perm) em Matemática Pura. Foi docente na Faculdade AeroEspacial da Universidade Estatal Técnica de Perm, e, actualmente, é Professora Auxiliar no Instituto Superior Politécnico e Universitário. O seu endereço electrónico é: ealves@ispu.ac.mz

[2]Prof. Doutor M. J. Alves é Mestrado (Universidade Estatal de Saint-Petersburg) e Doutorado (Universidade Estatal de Perm) em Matemática Pura. É membro da American Mathematical Society (AMS) e da Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Actualmente é Professor Associado na Universidade Eduardo Mondlane e no Instituto Superior de Ciências e Tecnologia de Moçambique. O seu endereço electrónico é: majoalves@member.ams.org

Prefácio

O presente trabalho é uma colectânea de exercícios referentes a alguns temas das disciplinas de Análise Matemática I e Análise Matemática II. As primeira[3] e segunda partes desta edição de "Elementos de Análise Matemática" ficam, deste modo, a completar-se.

Nesta parte II faz-se uma digressão ao conceito de continuidade e continuidade uniforme de função. Especial atenção é dada ao tema sobre diferenciação, integração e suas aplicações. Aborda-se o tema sobre integrais impróprios, critérios de convergência de integrais impróprios. Finalmente, nos últimos módulos, introduz-se a noção de séries numéricas, critérios de convergência de séries numéricas.

A assimilação dos principais conceitos e teoremas, que se encontram no resumo teórico, são fundamentais para a compreensão dos exercícios resolvidos e a resolução dos exercícios propostos. Subentende-se que as demonstrações destes teoremas o leitor teve a oportunidade de aprendê-las, durante as aulas teóricas ministradas.

Parte dos exercícios aqui retratados foram retirados do livro, já considerado clássico e de consulta obrigatória, sob redacção do académico russo Boris Pavlovitch Demidovitch[4].

Gostaríamos de exprimir os nossos agradecimentos à todos que, directa ou indirectamente, contribuíram para que este trabalho fosse publicado.

Maputo, Junho 2004

Os autores

[3] M. J. Alves "Elementos de Análise Matemática. Parte I"
[4] Boris Pavlovitch Demidovitch (1906–1977) — matemático russo

Conteúdo

Módulo 1

Continuidade e continuidade uniforme

1.1 Resumo teórico

Seja $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^1$, $a \in \mathrm{E}$, E é um conjunto aberto. A função $f : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^1$ é **contínua** no ponto a se $f(x)$ está definida numa vizinhança de a e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Diremos que a função $f(x)$ é **contínua, no ponto a, segundo Heine**[1] se para qualquer que seja a sucessão $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{E}$ $(n = 1, 2, \ldots, n)$, $x_n \to a$, quando $n \to \infty$, temos $f(x_n) \to f(a)$. A função $f(x)$ é **contínua, no ponto a, segundo Cauchy**[2] se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x \;\in\; \mathrm{E} : \; |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

A função $f(x)$ é contínua em E se ela fôr contínua em cada ponto de E. A função $f(x)$ é **contínua à direita** do ponto a se $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$. A função $f(x)$ é **contínua à esquerda** do ponto a se $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$. A notação usada é: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$. Se $f(x)$ fôr contínua no ponto a, então tem lugar a igualdade: $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$. A função $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ se ela é contínua em cada ponto de (a, b), contínua à direita do ponto a e contínua à esquerda do ponto b.

Teorema 1. *(Primeiro teorema de Weierstrass[3]) Se a função $f(x)$ é contínua num intervalo fechado, então ela é limitada nesse intervalo fechado.*

Teorema 2. *(Segundo teorema de Weierstrass) Se a função $f(x)$ é contínua num intervalo fechado, então ela atinge os seus valores máximo e mínimo nesse intervalo fechado.*

[1] Heinrich Eduard Heine (1821–1881) — matemático alemão
[2] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) — matemático francês
[3] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) — matemático alemão

Diremos que $f(x)$ é **uniformemente contínua** em $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^1$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x',\ x'' \in \mathrm{E}:\ |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Teorema 3. *(de Cantor[4]) Se a função $f(x)$ é contínua num intervalo fechado (segmento), então ela é uniformemente contínua nesse intervalo fechado.*

A expressão

$$\omega(\delta; f; \mathrm{E}) \overset{\text{def}}{=} \sup_{|x'-x''|<\delta} |f(x') - f(x'')|$$

chamaremos **módulo de continuidade**. A função $\omega(\delta; f; \mathrm{E})$ é não negativa e não decrescente.

Teorema 4. *As duas afirmações são equivalentes:*

1) $f(x)$ é uniformemente contínua em E;

2) $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega(\delta; f; \mathrm{E}) = 0$.

Diremos que x_0 é **ponto de descontinuidade** da função $f(x)$ se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$, então x_0 é **ponto de descontinuidade evitável**. Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, então x_0 é **ponto de descontinuidade do tipo degrau (salto)**. Os pontos de descontinuidade evitável e descontinuidade do tipo degrau são chamados **pontos de descontinuidade de primeira espécie**. Quando um ou ambos limites laterais numa vizinhança do ponto x_0 não existem ou são iguais a infinito, diremos que x_0 é **ponto de descontinuidade de segunda espécie**.

1.2 Exercícios resolvidos

1) Investigue a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = |x|$;

Resolução. Por definição

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

[4]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) — matemático alemão

O ponto que suscita dúvidas, sobre a continuidade da função $f(x)=|x|$, é $x=0$. Vamos verificar se $f(x)$ é contínua nesse ponto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0,$$

portanto a função $f(x)=|x|$ é contínua em todo o seu domínio de definição. $\square$

(b)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se} \quad x\neq 2,\\[2ex] A, & \text{se} \quad x=2;\end{cases}$$

Resolução. Precisamos verificar se $f(x)$ é contínua no ponto $x=2$. Temos:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Em conclusão, se $A=f(2)$ fôr igual a 4, então $f(x)$ é contínua no ponto $x=2$, consequentemente ela é contínua em todo o seu domínio. $\square$

(c) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ se $x\neq 0$ e $f(0)=1$;

Resolução. Temos:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{se} \quad x>0,\\[2ex] 1, & \text{se} \quad x=0,\\[2ex] -\dfrac{\sin x}{x}, & \text{se} \quad x<0.\end{cases}$$

Vamos verificar se $f(x)$ é contínua no ponto $x=0$. Para tal, precisamos de calcular os limites laterais desta função no ponto $x=0$:

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=f(0),$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1\neq f(0).$$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x=0$, pois $f(0^+)=f(0)\neq f(0^-)$. Contudo, ela é contínua à direita do ponto $x=0$. $\square$

(d) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$;

Resolução. Vamos calcular os limites laterais da função no ponto $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = 0, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = 0.$$

Logo, $f(x)$ é contínua. $\square$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, se $x \neq 1$, $f(1)$ é qualquer real finito.

Resolução. Vamos achar os limites laterais desta função no ponto $x = 1$. Temos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Concluímos que $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 1$. $\square$

2) Ache os pontos de descontinuidade e caracterize-os:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x)^2}$;

Resolução. Esta função está definida em $\mathbb{R}^1 \setminus \{-1\}$. O ponto $x = -1$ é de descontinuidade de segunda espécie, pois $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$. $\square$

(b) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + x^3}$;

Resolução. Factorizando o denominador temos: $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$. O factor $1 + x$ anula-se, quando $x = -1$ e o factor $1 - x + x^2$ é sempre positivo. Assim vemos que, a função não está definida no ponto $x = -1$. O ponto $x = -1$ é ponto de descontinuidade evitável, pois

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{3}. \quad \square$$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

Resolução. O ponto $x = 0$ é de descontinuidade. Vamos calcular os limites laterais neste ponto:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Portanto, $x = 0$ é ponto de descontinuidade tipo degrau (salto).

3) Investigue a continuidade para as funções seguintes:

(a)

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{se} \quad 0\le x\le 1,\\ 2-x & \text{se} \quad 1<x\le 2; \end{cases}$$

Resolução. Precisamos verificar a continuidade de $f(x)$ no ponto $x=1$. Temos:

$$f(1)=1, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2=1=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(2-x).$$

Portanto, a função é contínua no segmento dado $[0,2]$. $\square$

(b)

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{se} \quad |x|\le 1,\\ 1, & \text{se} \quad |x|>1. \end{cases}$$

Resolução. Vamos investigar a continuidade desta função nos pontos $x=-1$ e $x=1$. Para o ponto $x=-1$ temos:

$$f(-1)=-1, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1} x=-1\neq \lim_{x\to -1^-} f(x)=1.$$

O ponto $x=-1$ é de descontinuidade tipo degrau (salto). Para o ponto $x=1$ temos:

$$f(1)=1, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=1=\lim_{x\to 1^-} f(x).$$

Portanto, $f(x)$ é contínua no ponto $x=1$. $\square$

4) A função $f(x)$ não tem significado, quando $x=0$. Defina $f(0)$, de modo que $f(x)$ seja contínua no ponto $x=0$, se:

(a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

Resolução. Para que a função $f(x)$ seja contínua no ponto $x=0$ é preciso definir $f(0)$ de tal modo, que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Façamos a substituição $1+x=t^6\to 1,\ x\to 0$. Então,

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\frac{3}{2}. \quad \square$$

(b) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

Resolução. Para que a função $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$ é preciso que

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x).$$

Calculando este limite temos:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = 2. \quad \square$$

5) Mostre que a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é uniformemente contínua no intervalo $(0,1)$.

Resolução. Precisamos mostrar que

$$\exists\, \epsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x', x'' \ \in\ (0,1) : |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \epsilon.$$

Seja $x' = \dfrac{1}{n}$, $x'' = \dfrac{1}{n + k\varepsilon}$, $k > 1$. Assim,

$$|x' - x''| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n + k\varepsilon} \right| = \frac{k\varepsilon}{n(n + k\varepsilon)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

contudo

$$|f(x') - f(x'')| = |n - n - k\varepsilon| = k\varepsilon > \varepsilon$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. $\square$

6) Dada a função $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$ verifique se ela é uniformemente contínua.

Resolução. A função $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, no segmento dado $-1 \leq x \leq 1$, é contínua. Em virtude do teorema de Cantor, ela é uniformemente contínua neste segmento. $\square$

7) Dada a função $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(0 < x < \pi)$ verifique se ela é uniformemente contínua.

Resolução. Vamos compôr a função

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se} \quad 0 < x < \pi, \\ 1, & \text{se} \quad x = 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = \pi. \end{cases}$$

A função $F(x)$ é contínua no segmento $[0, \pi]$ e, pelo teorema de Cantor, ela é uniformemente contínua em $[0, \pi]$. Portanto, ela é também uniformemente contínua no intervalo $(0, \pi) \subset [0, 1]$. Como a restrição de $F(x)$ no intervalo $(0, \pi)$ coincide com a função $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, concluímos que $f(x)$ é uniformemente contínua em $(0, \pi)$. $\square$

8) Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$ $(1 \leq x < +\infty)$ verifique se ela é uniformemente contínua.

Resolução. Para qualquer $\varepsilon > 0$ e $x', x'' \in [0, +\infty)$, vejamos o módulo da diferença $|f(x') - f(x'')|$:

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \left| \frac{x' - x''}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \right| \leq \frac{|x' - x''|}{2} < |x' - x''| < \varepsilon = \delta(\varepsilon).$$

Concluíndo, a função estudada é uniformemente contínua. $\square$

9) Para $\varepsilon > 0$, ache $\delta = \delta(\varepsilon)$ que satisfaz as condições de continuidade uniforme para as funções segunintes:

(a) $f(x) = 5x - 3, \quad -\infty < x < +\infty;$

Resolução. Sejam quaisquer x' e x'', vejamos o módulo da diferença $|f(x') - f(x'')|$:

$$|5x' - 3 - 5x'' + 3| = 5|x' - x''| < \varepsilon \Longrightarrow |x' - x''| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon). \quad \square$$

(b) $f(x) = x^2 - 2x - 1, \quad -2 \leq x \leq 5;$

Resolução. De modo análogo ao exercício anterior temos:

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - 2x' - 1 - x''^2 + 2x'' + 1| = |x'^2 - x''^2 - 2(x' - x'')| =$$

$$= |(x' + x'')(x' - x'') - 2(x' - x'')| \leq |10(x' - x'') - 2(x' - x'')| =$$

$$= 8|x' - x''| < \varepsilon \Longrightarrow |x' - x''| < \frac{\varepsilon}{8} = \delta(\varepsilon). \quad \square$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad 0.1 \leq x \leq 1.$

Resolução. Sejam x' e x'' quaisquer valores pertencentes ao segmento $[0.1, 1]$, vejamos o módulo da diferença

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \left| \frac{x'' - x'}{x'x''} \right| < 100|x' - x''| < \varepsilon$$

se $|x' - x''| < \dfrac{\varepsilon}{100} = \delta(\varepsilon)$. $\square$

10) Obtenha a estimação do módulo de continuidade do tipo $\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha$, onde δ, C e α são constantes, se:

(a) $f(x) = x^3, \quad 0 \leq x \leq 1;$

Resolução. Por definição $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{|x'-x''|<\delta} |f(x') - f(x'')|$. Assim, para quaisquer $x', x'' \in [0,1]$ temos:

$$\sup_{|x'-x''|<\delta} |f(x') - f(x'')| = \sup_{|x'-x''|<\delta} |x'^3 - x''^3| =$$

$$= \sup_{|x'-x''|<\delta} |(x'-x'')(x'^2 + x'x'' + x''^2)| < \delta \cdot \sup_{|x'-x''|<\delta} |x'^2 + x'x'' + x''^2| < 3\delta.$$

Em conclusão: $C \equiv 3$, $\alpha \equiv 1$. $\square$

(b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad 1 < x < +\infty$.

Resolução. Sendo $x', x'' \in [1, +\infty)$, para $|x' - x''| < \delta$ temos:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x'-x''|<\delta} |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sup_{|x'-x''|<\delta} \frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} \leq \frac{1}{2} \sup_{|x'-x''|<\delta} |x' - x''| < \frac{\delta}{2}.$$

Assim, $C \equiv \dfrac{1}{2}$, $\alpha \equiv 1$. $\square$

1.3 Perguntas de controle

1) Dê a definição de função limitada superiormente (inferiormente) no conjunto $\mathrm{E} \subset X$.
2) Dê a definição de função contínua num ponto.
3) Formule e demonstre o primeiro teorema de Weierstrass.
4) É correcto afirmar que se uma função é contínua num intervalo, então ela é limitada nesse intervalo?
5) Formule e demonstre o segundo teorema de Weierstrass.
6) Dê a definição de função uniformemente contínua num conjunto X.
7) É correcto dizer que se uma função $f(x)$ é contínua num conjunto X, então ela é uniformemente contínua nesse conjunto?
8) Se uma função $f(x)$ é uniformemente contínua num conjunto X, ela é contínua em X?
9) Formule o teorema de Cantor.
10) Formule o teorema que expressa a condição necessária e suficiente de continuidade uniforme de uma função num conjunto X.

1.4 Exercícios propostos

1) Investigue a continuidade das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, se $x \neq -1$ e $f(-1)$ é qualquer;

   (c) $f(x) = \left| \dfrac{\sin x}{|x|} \right|$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$;

   (d) $f(x) = \operatorname{sign} x$;

   (e) $f(x) = x \ln x^2$, se $x \neq 0$ e $f(0) = a$.

2) Ache os pontos de descontinuidade e caracterize-os:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$;

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$;

   (c) $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

3) Investigue a continuidade para as funções seguintes:

   (a)
$$f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi x}{2}, & \text{se} \quad |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & \text{se} \quad |x| > 1; \end{cases}$$

   (b)
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{se} \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

4) A função $f(x)$ não tem significado quando $x = 0$. Defina $f(0)$, de modo que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$, se:

   (a) $f(x) = \sin x \sin \dfrac{1}{x}$;

   (b) $f(x) = x \ln^2 x$.

5) Mostre que a função não limitada $f(x) = x + \sin x$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^1$.

6) Dada a função $f(x) = \ln x$ $(0 < x < 1)$ verifique se ela é uniformemente contínua.

7) Dada a função $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ verifique se ela é uniformemente contínua.

8) Dada a função $f(x) = x \sin x$ $(0 \le x < +\infty)$ verifique se ela é uniformemente contínua.

9) Para $\varepsilon > 0$, ache $\delta = \delta(\varepsilon)$ que satisfaz as condições de continuidade uniforme para as funções seguintes:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \le x < +\infty;$

   (b) $f(x) = 2\sin x - \cos x, \quad -\infty < x < +\infty;$

   (c) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ se $x \ne 0$ e $f(0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi.$

10) Obtenha a estimação do módulo de continuidade do tipo $\omega_f(\delta) \le C\delta^\alpha$, onde δ, C e α são constantes, se:

   (a) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi;$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$

Módulo 2

Derivada e diferencial. Regras de derivação

2.1 Resumo teórico

Seja $f(x)$ uma função definida numa certa vizinhança do ponto x_0. A expressão

$$\Delta f \overset{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

chamaremos **acréscimo** da função $f(x)$ no ponto x_0 correspondente ao acréscimo Δx do seu argumento x. A expressão

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

chamaremos, caso exista, **derivada** da função $f(x)$ no ponto x_0. A denotação usada é $f'(x_0)$ ou $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $f(x)$ e $g(x)$ duas funções que têm derivadas. Então:

1) $(\alpha)' = 0$;

2) $[\alpha f(x)]' = \alpha f'(x)$;

3) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

4) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

5) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \not\equiv 0.$

Seja x variável independente. Então:

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

2) $(\sin x)' = \cos x$;

3) $(\cos x)' = -\sin x$;

4) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \ldots\right)$;

5) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \ldots)$;

6) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$;

7) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$;

8) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

9) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

10) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a > 0, a \neq 1)$.

A expressão

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

chama-se **derivada** de $f(x)$ **à esquerda** do ponto x_0. Denota-se $f'_-(x_0)$. A expressão

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

chama-se **derivada** de $f(x)$ **à direita** do ponto x_0. Denota-se $f'_+(x_0)$.

Para que a função $f(x)$ tenha derivada no ponto x_0 é necessário e suficiente que $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. A afirmação "a função tem derivadaťť entendemos a existência de derivada finita.

A expressão para o cálculo da derivada pode se apresentar de outra maneira equivalente. Se fizermos $x_0 + \Delta x = x$ temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Teorema 5. *Se a função $u(x)$ tem derivada no ponto x_0 e a função $\phi(u)$ tem derivada no ponto $u(x_0)$, então a função composta $f(x) = \phi[u(x)]$ tem derivada no ponto x_0 e essa derivada é*

$$f'(x_0) = \phi'[u(x_0)]u'(x_0).$$

Teorema 6. *Sejam $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ duas funções definidas num certo intervalo. Se, em todos os pontos desse intervalo, as funções $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$ têm derivadas $\phi'(t) \neq 0$ e $\psi'(t)$, então tem lugar a igualdade*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

onde $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, $y'_t = \dfrac{dy}{dt}$, $x'_t = \dfrac{dx}{dt}$.

Diremos que a função $f(x)$ é **diferenciável** no ponto x_0 se o seu acréscimo Δf neste ponto, correspondente ao acréscimo Δx do argumento x, admite a representação

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

onde A é um certo valor, não dependente de Δx, α é uma função dependente de Δx, infinitamente pequena e contínua no ponto $\Delta x = 0$.

Teorema 7. *Para que a função $f(x)$ seja diferenciável no ponto x_0 é necessário e suficiente que exista a derivada $f'(x_0)$.*

Neste caso o acréscimo é:

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

A função linear homogénea de argumento Δx definida por $df = f'(x_0)\Delta x$ $(f'(x_0) \neq 0)$ chamaremos **diferencial** da função $f(x)$ no ponto x_0. Para valores de Δx muito pequenos temos que $\Delta f \approx df$, isto é,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Seja $y = y(x)$ uma função diferenciável que satisfaz a equação $F(x, y) = 0$. Então, a derivada $y'(x)$ desta função dada na forma implícita podemos achar a partir da equação

$$\frac{d[F(x, y)]}{dx} = 0,$$

onde $F(x, y)$ é considerada uma função composta de x.

2.2 Exercícios resolvidos

1) Ache o acréscimo Δx do argumento x e o respectivo acréscimo Δy da função $f(x) = \log x$, se x varia de 1 até 1000.

   Resolução. Temos $x_0 = 1$, $x_0 + \Delta x = 1000$, portanto $\Delta x = 1000 - 1 = 999$. O acréscimo Δf é: $f(1000) - f(1) = \log 1000 - \log 1 = 3$. $\square$

2) À variável x faz-se um acréscimo Δx. Ache o acréscimo Δy se $y = ax + b$.

   Resolução. Por definição $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Assim,

$$\Delta y = [a(x + \Delta x) + b] - (ax + b) = a\Delta x. \quad \square$$

3) Demonstre que $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$.

   Resolução. Seja $F(x) \equiv f(x) + g(x)$. Vamos achar o acréscimo de $F(x)$. Temos:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)] =$$

$$= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x). \quad \square$$

4) Usando a definição de derivada, ache as derivadas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^2$;

   Resolução. Por definição

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

   Temos:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta^2 x.$$

   Assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta^2 x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \quad \square$$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$;

   Resolução. Temos:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

   Assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \square$$

5) Ache a derivada da função $f(x) = 2 + x - x^2$.

Resolução. Aplicamos a regra de derivação para a soma de funções. Assim,

$$f'(x) = (2 + x - x^2)' = 2' + x' - (x^2)' = 0 + 1 - 2x = 1 - 2x. \quad \Box$$

6) Calcule $f'(2)$ se $f(x) = x^2 \sin(x - 2)$.

Resolução. Vamos primeiro achar $f'(x)$ e, para tal, faremos uso da regra de derivação para um produto. Assim,

$$f'(x) = [x^2 \sin(x-2)]' = (x^2)' \sin(x-2) + x^2[\sin(x-2)]' = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2).$$

Particularizando $x = 2$ temos $f'(2) = 4$. $\Box$

7) Ache a derivada da função $f(x) = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Resolução. A expressão $\sqrt{a^2 + b^2}$ é constante e, por isso mesmo, podemos tirá-la debaixo do sinal da derivada. Assim,

$$f'(x) = \left(\frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ax^6 + b)' = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \Box$$

8) Ache a derivada da função $f(x) = (\sin x)\sqrt[3]{x^2}$.

Resolução. Aplicamos a regra de derivação para o caso quando temos o produto de duas funções $g(x) = \sin x$ e $h(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$. Assim,

$$f'(x) = [g(x)h(x)]' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x).$$

Achamos, primeiro, $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$ e $h'(x) = (x^{2/3})' = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$. Em conclusão,

$$f'(x) = (\cos x)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2\sin x}{3\sqrt[3]{x}}. \quad \Box$$

9) Ache a derivada da função $\dfrac{a + bx}{c + dx}$.

Resolução. Aplicamos a regra de derivação para o caso quando temos o quociente de funções. É claro que neste exercício devemos fazer a restrição $c + dx \neq 0$. Deste modo,

$$f'(x) = \left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)' = \frac{(a + bx)'(c + dx) - (a + bx)(c + dx)'}{(c + dx)^2} =$$

$$= \frac{b(c + dx) - d(a + bx)}{(c + dx)^2} = \frac{bc - da}{(c + dx)^2}. \quad \Box$$

10) Ache a derivada da função $y(t) = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t$.

Resolução. Aplicamos, inicialmente, a regra de derivação duma diferença e, de seguida, a regra de derivação dum produto. Temos:

$$y'(t) = [2t\sin t - (t^2-2)\cos t]' = (2t\sin t)' - [(t^2-2)\cos t]' =$$
$$= 2[t'\sin t + t(\sin t)'] - [(t^2-2)'\cos t + (t^2-2)(\cos t)'] =$$
$$= 2(\sin t + t\cos t) - [2t\cos t + (2-t^2)\sin t] = t^2\sin t. \quad \square$$

11) Ache a derivada da função $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

Resolução. Aplicamos a regra de derivação para o caso do quociente de funções:

$$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x)'x^2 - e^x(x^2)'}{x^4} = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}. \quad \square$$

12) Ache a derivada da função $f(x) = (1+3x-5x^2)^{30}$.

Resolução. Temos uma função composta do tipo $f(u) = u^{30}$, onde $u(x) = 1+3x-5x^2$. Aplicando a regra de derivação para uma função composta temos:

$$f'(x) = 30u^{29}u'(x) = 30(1+3x-5x^2)^{29}(1+3x-5x^2)' = 30(1+3x-5x^2)^{29}(3-10x). \quad \square$$

13) Ache a derivada da função $f(y) = (2a+3by)^2$.

Resolução. A variável independente é y. Denotemos $2a+3by = u(y)$. Então, $f(y) = u^2$ e $f'(y) = 2uu' = 2(2a+3by)(2a+3by)' = 12ab + 18b^2y$. $\square$

14) Ache a derivada da função $f(x) = |x|$.

Resolução. Por definição temos:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$|x|' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vejamos a derivada de $|x|$ no ponto $x_0 = 0$. Para tal calculamos as derivadas laterais neste ponto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 = f'_+(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = -1 = f'_-(0).$$

Em conclusão: a função $f(x)=|x|$ não tem derivada no ponto $x=0$, porque $f'_+(0)\neq f'_-(0)$. $\square$

15) Ache a derivada da função

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad x\leq 0 \\ e^{-x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

no ponto $x=0$.

Resolução. Vamos calcular as derivadas laterais no ponto $x=0$. Temos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x} = -1 = f'_+(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-1}{x} = -1 = f'_-(0).$$

Portanto, $f'(0)=-1$. $\square$

16) Ache $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ para a função $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

Resolução. No ponto $x_0=0$ temos:

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x\to 0^\pm}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1. \quad \square$$

17) Ache $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$, onde $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$ se $x\neq 0$ e $f(0)=0$.

Resolução. Calculamos directamente segundo a definição:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+e^{1/x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+\infty} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+e^{1/x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1. \quad \square$$

18) Ache $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$, onde $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Resolução. Como no exercício anterior, calculamos as derivadas laterais directamente segundo a definição:

$$f'_\pm(0) = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0^\pm} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

pois o produto de um infinitésimo com uma função limitada é um infinitésimo. □

19) Dada a função $f(x) = e^{-x}$, ache $f(0) + xf'(0)$.

Resolução. Começamos por calcular directamente $f(0) = e^{-0} = 1$. Agora vamos achar $f'(0)$:

$$f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x} \Longrightarrow f'(0) = -e^{-0} = -1.$$

Assim, $f(0) + xf'(0) = 1 + x(-1) = 1 - x$. □

20) Mostre que a função $y(x) = xe^{-x}$ satisfaz a equação $xy'(x) = (1 - x)y(x)$.

Resolução. Vamos achar $y'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$. Colocando $e^{-x} - xe^{-x}$ no lugar de $y'(x)$ que se encontra na parte esquerda da equação, temos:

$$x(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(1 - x) = y(x)(1 - x). \quad \square$$

21) Dada a função $y(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$, ache $y'(x)$.

Resolução. Neste exercício podemos aplicar directamente a regra de derivação para um produto. Contudo, existe uma outra maneira mais eficaz que permite achar a derivada. Vamos começar por logaritmizar a função dada:

$$y(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1) \Longrightarrow \ln y(x) = \ln(x + 1) + \ln(2x + 1) + \ln(3x + 1).$$

Agora derivamos à esquerda e à direita:

$$[\ln y(x)]' = [\ln(x + 1) + \ln(2x + 1) + \ln(3x + 1)]' \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{2x + 1} + \frac{3}{3x + 1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y'(x) = \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{2x + 1} + \frac{3}{3x + 1} \right) (x + 1)(2x + 1)(3x + 1) =$$

$$= (2x + 1)(3x + 1) + 2(x + 1)(3x + 1) + 3(x + 1)(2x + 1). \quad \square$$

22) Dada a função $y(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$, ache $y'(x)$.

Resolução. Neste exercício vamos ver a vantagem do método usado anteriormente. Começamos por logaritmizar a função dada:

$$y(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4} \Longrightarrow \ln y(x) = 2\ln(x+2) - 3\ln(x+1) - 4\ln(x+3).$$

Derivando esta última igualdade temos:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y'(x) = \frac{2(x+2)}{(x+1)^3(x+3)^4} - \frac{3(x+2)^2}{(x+1)^4(x+3)^4} - \frac{4(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^5}. \quad \square$$

23) Ache a derivada da função $y(x) = x^x$.

Resolução. Logaritmizando temos: $\ln y(x) = x \ln x$. Derivando ambos os lados

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

obtemos $y'(x) = (1+\ln x)x^x$. $\square$

24) $y(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

Resolução. Logaritmizando a função dada temos: $\ln y(x) = \sin x \ln\cos x$. Daqui, derivando à esquerda e à direita, obtemos

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \cos x \ln\cos x + \sin x\frac{(-\sin x)}{\cos x} =$$

$$= \cos x \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \Longrightarrow y'(x) = \left(\frac{\cos^2 x \ln\cos x - \sin^2 x}{\cos x}\right)(\cos x)^{\sin x}. \quad \square$$

25) Dada a função $y = 3x + x^2$, ache $\dfrac{dx}{dy}$.

Resolução. Vamos derivar à esquerda e à direita em relação à variável y:

$$\frac{dy}{dy} = \frac{d(3x+x^2)}{dy} \Longrightarrow 1 = 3\frac{dx}{dy} + 2x\frac{dx}{dy} = (3+2x)\frac{dx}{dy} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3+2x}. \quad \square$$

26) Dada a função $y = x - \dfrac{1}{2}\sin x$, ache $\dfrac{dx}{dy}$.

Resolução. Analogamente ao exercício anterior, vamos derivar à esquerda e à direita em relação à variável y:

$$\frac{dy}{dy} = \frac{d(x - 0.5\sin x)}{dy} \Longrightarrow 1 = \frac{dx}{dy} - 0.5\cos x \frac{dx}{dy} =$$

$$= (1 - 0.5\cos x)\frac{dx}{dy} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 - 0.5\cos x}. \quad \square$$

27) Ache a derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ da função dada na forma paramétrica:

$$x(t) = 2t - 1, \quad y(t) = t^3.$$

Resolução. Aplicando a definição temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Vamos calcular, separadamente, y'_t e x'_t:

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2.$$

Em conclusão: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2}{2}$. $\square$

28) Demonstre que a função y, dada na forma paramétrica

$$x(t) = 2t + 3t^2, \quad y(t) = t^2 + 2t^3,$$

satisfaz a equação $y = (y'_x)^2 + 2(y'_x)^3$.

Resolução. Calculamos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t + 6t^2}{2 + 6t} = \frac{t + 3t^2}{1 + 3t} = \frac{t(1 + 3t)}{1 + 3t} = t.$$

Assim,

$$y(t) = t^2 + 2t^3 = (y'_x)^2 + 2(y'_x)^3. \quad \square$$

29) Ache a derivada $y'(x)$ da função dada na forma implícita $2x-5y+10=0$.

Resolução. Derivando em relação à x temos:

$$\frac{d(2x-5y+10)}{dx}=0 \Longrightarrow 2\frac{dx}{dx}-5\frac{dy}{dx}+\frac{d10}{dx}=$$

$$=2-5y'=0 \Longrightarrow y'(x)=\frac{2}{5}. \quad \square$$

30) Ache a derivada $y'(x)$ da função dada na forma implícita $x^3+y^3=a^3$.

Resolução. Derivando em relação à x temos:

$$\frac{d(x^3+y^3)}{dx}=0 \Longrightarrow \frac{dx^3}{dx}+\frac{dy^3}{dx}=$$

$$=3x^2+3y^2y'=0 \Longrightarrow y'(x)=-\frac{x^2}{y^2}. \quad \square$$

31) Ache o diferencial da função $f(x)=\sin x - x\cos x$.

Resolução. Por definição $df(x)=f'(x)dx$. Calculamos a derivada de $f(x)$:

$$f'(x)=(\sin x - x\cos x)'=(\sin x)'-(x\cos x)'=$$

$$=\cos x - x'\cos x - x(\cos x)'=\cos x-\cos x + x\sin x = x\sin x.$$

Assim, $d(\sin x - x\cos x)=x\sin x dx$. $\square$

32) Ache o diferencial da função $f(x)=\ln(1-x^2)$.

Resolução. Calculando directamente temos:

$$d[\ln(1-x^2)]=[\ln(1-x^2)]'dx=\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}dx=-\frac{2x}{1-x^2}dx. \quad \square$$

33) Calcule aproximadamente $\log 11$.

Resolução. Seja $f(x)=\log x$, $x_0=10$, $\Delta x=1$. Então,

$$\log(x_0+\Delta x)\approx\frac{1}{x_0\ln 10}\Delta x+\log x_0.$$

Colocando os valores de x_0 e Δx obtemos

$$\log 11\approx\frac{1}{10\ln 10}+\log 10=1+\frac{1}{10\ln 10}. \quad \square$$

34) Calcule aproximadamente $\sqrt{100,01}$.

Resolução. Seja $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=100$, $\Delta x=0.01$. Então,

$$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x+\sqrt{x_0}.$$

Colocando os valores de x_0 e Δx obtemos

$$\sqrt{100.01}\approx\frac{1}{2\sqrt{100}}\cdot 0.01+\sqrt{100}=\frac{0.01}{20}+10=\frac{1}{2000}+10. \quad \square$$

2.3 Perguntas de controle

1) Explique o que entende por acréscimo duma função.

2) Defina derivada duma função.

3) O que entende por diferencial duma função?

4) Formule o teorema sobre a derivada da função composta.

5) Defina derivada lateral à esquerda e à direita.

2.4 Exercícios propostos

1) Ache o acréscimo de x e o respectivo acréscimo da função $y=e^x$ se x varia de 1 até 1.005.

2) Ache o acréscimo Δx do argumento x e o respectivo acréscimo Δy da função $y(x)=\dfrac{1}{x^2}$ se x varia de 0.01 até 0.001.

3) A variável x tem um acréscimo Δx. Ache o acréscimo Δy se:

   (a) $y=\alpha$;

   (b) $y=ax^2+bx+c$;

   (c) $y=a^x$.

4) Demonstre que:

   (a) $\Delta[\alpha f(x)]=\alpha\Delta f(x)$;

   (b) $\Delta[f(x)\cdot g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

5) Aplicando a definição de derivada, ache as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \alpha$;
(b) $f(x) = x^3$;
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
(e) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
(f) $f(x) = \arcsin x$.

6) Ache $f'(1)$, $f'(2)$ e $f'(3)$ se $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

7) Ache $f'(2)$ se $f(x) = x^2\cos(x-2)$.

8) Ache $f'(1)$ se $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.

9) Ache $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se a função $f(x)$ é diferenciável no ponto a.

10) Demonstre que se a função $f(x)$ é diferenciável e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] = f'(x).$$

11) Utilizando a tabela de derivação, ache as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2+\sqrt{x}-x^3$;
(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$;
(c) $f(x) = a^5+5a^3x^2-x^5$;
(d) $f(x) = (x-a)(x-b)$;
(e) $f(x) = \dfrac{ax+b}{a+b}$;
(f) $f(x) = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$;
(g) $f(x) = (x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$;
(h) $f(x) = (1+nx^m)(1+mx^n)$;
(i) $f(x) = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$;
(j) $f(x) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$.

12) Ache as derivadas das funções:

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

(b) $f(x) = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$;

(d) $f(x) = \dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$;

(e) $f(x) = \dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$;

(f) $f(x) = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$;

(g) $f(x) = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$;

(h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$;

(j) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$;

(k) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(l) $f(x) = \cos 2x - 2\sin x$;

(m) $f(x) = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$;

(n) $f(x) = \sin(\cos^2)\cos(\sin^2 x)$;

(o) $f(x) = \sin^n x \cos nx$;

(p) $f(x) = \sin[\sin(\sin x)]$;

(q) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

(r) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

(s) $f(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^n}$;

(t) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$;

(u) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

(v) $f(x) = e^{-x^2}$;

(w) $f(x) = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^3 x}$;

(x) $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$;

(y) $f(x) = \left[\dfrac{(1-x)^2}{2}\sin x - \dfrac{(1+x)^2}{2}\cos x\right] e^{-x}$.

13) Ache as derivadas das funções:

(a) $f(x) = e^x\left(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)$;

(b) $f(x) = \dfrac{\ln(3\sin x) + \cos x}{3^x}$;

(c) $f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$;

(d) $f(x) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b$;

(e) $f(x) = \ln[\ln(\ln x)]$;

(f) $f(x) = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(g) $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

(h) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

(i) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

(j) $f(x) = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;

(k) $f(x) = x\ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$;

(l) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\dfrac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}, \quad (a > 0,\ b > 0)$;

(m) $f(x) = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

(n) $f(x) = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

(o) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\sin x$;

(p) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

(q) $f(x) = \ln\dfrac{b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a + b\cos x}, \quad (0 \le |a| < |b|)$;

(r) $f(x) = \dfrac{1}{4x^4}\ln\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{16x^4}$;

(s) $f(x) = \ln\left[\dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

(t) $f(x) = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

14) Ache as derivadas das funções:

(a) $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

(b) $f(x) = \arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$;

(c) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}\arccos x$;

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{a}$;

(e) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$;

(f) $f(x) = \arcsin(\sin x)$;

(g) $f(x) = \arccos(\cos^2 x)$;

(h) $f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$;

(i) $f(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

(j) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

(k) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$;

(l) $f(x) = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(m) $f(x) = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

(n) $f(x) = \ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b}$;

(o) $f(x) = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

(p) $f(x) = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$.

15) Ache as derivadas das funções:

(a) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$;

(b) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arcctg} x^6$;

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

(e) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

16) Ache as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$;

(b) $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

(c) $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$;

(d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$;

(e) $f(x) = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$;

(f) $f(x) = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$;

(g) $f(x) = x + x^x + x^{x^x}, \quad (x > 0)$;

(h) $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

17) Ache a derivada logarítmica para as funções seguintes:

(a) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(b) $f(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

(c) $f(x) = (x + \sqrt{1+x^2})^n$;

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$.

18) Pois sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ duas funções diferenciáveis. Ache a derivada de $f(x)$, se:

(a) $f(x) = \sqrt{\phi^2(x) + \psi^2(x)}$;

(b) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}$;

(c) $f(x) = \sqrt[\phi(x)]{\psi(x)}, \quad (\phi(x) \neq 0, \psi(x) > 0)$;

(d) $f(x) = \log_{\phi(x)} \psi(x), \quad (\psi(x) > 0, \phi(x) > 0)$.

19) Ache $y'(x)$, se:

(a) $y = f(x^2)$;

(b) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

(c) $y = f(e^x)e^{f(x)}$;

(d) $y = f\{f[f(x)]\}$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável.

20) Qual deverá ser a condição para que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) seja contínua no ponto $x = 0$?

(b) seja diferenciável no ponto $x = 0$?

(c) tenha derivada contínua no ponto $x = 0$?

21) Mostre que a função $f(x) = |x - a|\phi(x)$, onde $\phi(x)$ é uma função contínua e $\phi(a) \neq 0$, não tem derivada no ponto $x = a$. Calcule $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.

22) Investigue, quanto à sua diferenciabilidade, as funções seguintes:

(a) $f(x) = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$;

(b) $f(x) = |\cos x|$;

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{4} & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ \\ |x| - 1 & \text{se} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

23) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq x_0 \\ ax + b & \text{se} \quad x > x_0. \end{cases}$$

Como devemos escolher os coeficientes "a" e "b", de modo a que $f(x)$ seja contínua e diferenciável no ponto $x = x_0$?

24) No segmento $a \leq x \leq b$, construa os conjugados das duas semirectas:

$$y = k_1(x - a) \quad (-\infty < x < a) \text{ e } y = k_2(x - b) \quad (b < x < +\infty).$$

25) Parte da curva $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ complete com uma parábola $y = a + bx^2$ $(|x| \leq c)$ (a e b são parâmetros desconhecidos) de tal modo que se obtenha uma curva suave.

26) Demonstre que a derivada de uma função par é uma função ímpar e a derivada de uma função ímpar é uma função par. Dê a interpretação geométrica deste facto.

27) Demonstre que a derivada duma função periódica diferenciável é uma função periódica com o mesmo período.

28) Ache as derivadas y'_x das funções dadas na forma paramétrica:

(a) $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \quad y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$;

(b) $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$;

(c) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$;

(d) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$;

(e) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$.

29) Ache as derivadas y'_x das funções dadas na forma implícita:

(a) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$;

(b) $y^2 = 2px$;

(c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$;

(e) $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

30) Para a função $f(x) = x^3 - 2x + 1$ defina:

(a) $\Delta f(1)$;

(b) $df(1)$ e compare-os se $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0.1$ e $\Delta x = 0.01$.

31) Ache:

(a) $d(xe^x)$;

(b) $d\left(\arccos \dfrac{1}{|x|}\right)$.

32) Sejam u, v e ω funções diferenciáveis de x. Ache dy se:

(a) $y = uv\omega$;

(b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$;

(c) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$.

33) Ache $\dfrac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}$;

34) Seja um sector circular de raio $R = 100\,\text{cm}$ e ângulo central $\alpha = 60$ graus. Em quanto variará a área deste sector se aumentarmos o raio R em $1\,\text{cm}$?

35) Substituíndo o acréscimo da função pelo seu diferencial ache aproximadamente $\sqrt[3]{1.02}$.

36) Demonstre a fórmula aproximada $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$ $(a > 0)$, onde $|x| < a$.

Módulo 3

Interpretação geométrica e mecânica da derivada

3.1 Resumo teórico

Teorema 8. *Se a função $f(x)$ tem derivada no ponto x_0 igual a $f'(x_0)$, então o gráfico desta função tem no ponto $M[x_0; f(x_0)]$ uma tangente, sendo o seu coeficiente angular igual a $f'(x_0)$. Isto é, a equação da tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto M é $y(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. A equação da normal, isto é, a recta que passa pelo ponto tangencial $M[x_0; f(x_0)]$ e perpendicular à tangente é $y(x) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.*

Sejam $x(t)$, $y(t)$ as coordenadas dum ponto N, no plano, no momento t e sejam $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ dois vectores unitários perpendiculares. O vector $\mathbf{r} = \overrightarrow{ON}$ podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

e a sua derivada

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}.$$

Esta derivada $\mathbf{r}'(t)$ expressa o vector **velocidade instântanea** do ponto N no momento t e está orientado segundo a tangente à trajectória.

3.2 Exercícios resolvidos

1) Pelos pontos $A(2;4)$ e $B(2+\Delta x; 4+\Delta y)$ da curva $y = x^2$ passa a secante AB. Ache o valor do coeficiente angular desta secante se $\Delta x = 1$. Qual é o valor do coeficiente

angular da tangente à esta curva no ponto A?

Resolução. O ponto A tem as coordenadas $x_A = 2$, $y_A = 4$ e o ponto B tem as coordenadas $x_B = 2 + \Delta x$, $y_B = 4 + \Delta y$. O coeficiente angular da secante AB é:

$$k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 + \Delta y - 4}{2 + \Delta x - 2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Se $x = 2$ e $\Delta x = 1$, então $\Delta y = (2+1)^2 - 2^2 = 5$, portanto, $k_1 = \dfrac{5}{1} = 5$.

O coeficiente angular da tangente à curva $y = x^2$, no ponto $A(2;4)$, é igual à $y'(2)$. Calculando a derivada de $y = x^2$, quando $x = 2$, temos $k_2 = y'(2) = 4$. $\square$

2) A lei de movimento dum ponto no eixo OX dá-se pela fórmula

$$x(t) = 10t + 5t^2,$$

onde t é o tempo (em segundos) e x é a distância (em metros). Ache a velocidade média do movimento, no intervalo de tempo $20 \le t \le 20 + \Delta t$, e calcule essa velocidade se $\Delta t = 1$, $t_0 = 20$.

Resolução. A velocidade média é igual ao quociente do espaço percorrido sobre o tempo que o ponto levou a percorrer esse espaço. Assim,

$$v_m(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{10(t_0 + \Delta t) + 5(t_0 + \Delta t)^2 - 10t_0 - 5t_0^2}{\Delta t} = 10 + 10t_0 + 5\Delta t.$$

A velocidade média, no intervalo de tempo $20 \le t \le 20 + \Delta t$, $\Delta t = 1$ é:

$$10 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 1 = 215\text{m/s}. \quad \square$$

3) Que ângulo forma com o eixo das abscissas a tangente à curva $y(x) = x - x^2$ no ponto com abscissa $x = 1$?

Resolução. O coeficiente angular da tangente ao gráfico da função $y(x) = x - x^2$, no ponto com abscissa $x = 1$, é igual à $y'(1)$. Assim,

$$k_t = \operatorname{tg} \alpha = 1 - 2x\big|_{x=1} = -1 \Longrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}. \quad \square$$

4) Ache o ângulo formado entre os gráficos das funções $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, na origem das coordenadas.

Resolução. Por ângulo formado entre as curvas $y = \sin x$ e $y = \sin 2x$, no ponto de $(0;0)$, entende-se como sendo o ângulo ω formado pelas tangentes à estas curvas, no ponto

$(0;0)$. Seja α_1 o ângulo formado entre a tangente à curva $y=\sin x$ e o eixo das abscissas, no ponto $(0;0)$. A tangente deste ângulo é igual à derivada de $y=\sin x$, quando $x=0$, isto é, $y'(0)=\cos 0=1=\operatorname{tg}\alpha_1$; de modo análogo, seja α_2 o ângulo formado entre a tangente à curva $y=\sin 2x$ e o eixo das abscissas, no ponto $(0;0)$. A tangente deste ângulo é igual à derivada de $y=\sin 2x$, quando $x=0$, isto é, $y'(0)=2\cos 0=2=\operatorname{tg}\alpha_2$. Assim,

$$\omega=\alpha_2-\alpha_1\Longrightarrow \operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_1}=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}\Longrightarrow \omega=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.\quad\square$$

5) Ache o ângulo formado entre a curva $y=\operatorname{tg}x$ e o eixo das abscissas, no ponto $(0;0)$.

Resolução. O ângulo formado entre a curva $y=\operatorname{tg}x$ e o eixo das abscissas, no ponto $(0;0)$ é o ângulo formado entre a tangente à curva $y=\operatorname{tg}x$, no referido ponto, e o eixo das abscissas. O coeficiente angular dessa tangente é:

$$k=\operatorname{tg}\alpha=y'(0)=\frac{1}{\cos^2 0}=1,$$

onde por α denotamos esse ângulo. Portanto, $\alpha=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}$. $\square$

6) Ache o ângulo formado pela curva $y=e^{x/2}$ e a recta $x=2$.

Resolução. A recta $x=2$ é perpendicular ao eixo das abscissas, portanto, forma com este eixo um ângulo recto, isto é, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. A tangente à curva $y=e^{x/2}$, no ponto $(2;e)$, tem coeficiente angular $k=y'(2)$, isto é, $k=0.5e$. Se denotarmos por β o ângulo formado entre a tangente à curva $y=e^{x/2}$, no ponto $(2;e)$, e o eixo das abscissas, temos $\beta=\operatorname{arctg}(e/2)$. Assim, o ângulo ω formado entre a curva $y=e^{x/2}$ e a recta $x=2$ é: $\omega=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(e/2)$. $\square$

7) Ache os pontos onde as tangentes à curva $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$ são paralelas ao eixo das abscissas.

Resolução. Para que a tangente à uma curva $y=f(x)$ seja paralela ao eixo das abscissas é necessário que $f'(x)=0$. Assim,

$$y'(x)=12x^3+12x^2-24x=0.$$

Resolvendo esta equação do terceiro grau obtemos os seguintes pontos:

$$(0;20),\quad (-2;-12),\quad (1;-3).\quad\square$$

8) Em que ponto a tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela à recta $5x + y - 3 = 0$?

Resolução. Começamos por escrever a equação da recta $5x + y - 3 = 0$ na sua forma canónica, isto é, $y = kx + b$:

$$5x + y - 3 = 0 \Longleftrightarrow y = -5x + 3.$$

Para que a tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 3$ seja paralela à recta $y = -5x + 3$ é necessário que tenha o mesmo coeficiente angular, isto é, $k = -5$. O coeficiente angular da tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 3$ (supondo que o ponto de contacto é $(x_0; y_0)$) é igual à $y'(x_0) = 2x_0 - 7$. Assim, $2x_0 - 7 = -5$, portanto,

$$x_0 = 1, y_0 = y(1) = 1 - 7 + 3 = -3. \quad \square$$

9) Escreva a equação da parábola $y = x^2 + bx + c$, que é tangente à recta $y = x$ no ponto $(1; 1)$.

Resolução. De modo geral a equação da tangente à parábola $y = x^2 + bx + c$ no ponto $(1; 1)$ é $y = y'(1)(x - 1) + 1$. Calculando $y'(x) = 2x + b$ e colocando $x = 1$ achamos $y'(1) = 2 + b$. Portanto a equação da tangente à parábola $y = x^2 + bx + c$ no ponto $(1; 1)$ é $y = (2 + b)x - (1 + b)$. Mas, por outro lado, temos na condição do exercício que essa tangente é dada pela equação $y = x$. Comparando estas duas equações vemos que elas serão iguais se $b = -1$. Falta agora calcular o valor do coeficiente c. Sabemos que $y(1) = 1 + b + c = 1$, portanto $c = 1$. $\square$

10) Determine o coeficiente angular da tangente à curva $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ no ponto $(1; 2)$.

Resolução. A questão resume-se em achar a derivada da função implícita $x^3+y^3-xy-7 = 0$:

$$3x^3 + 3y^2y' - y - xy' = 0 \Longrightarrow y'(3y^2 - x) = y - 3x^2 \Longrightarrow y' = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}.$$

Assim, $y'(1) = \dfrac{2 - 3}{3 \cdot 2^2 - 1} = -\dfrac{1}{11}$. $\square$

11) Ache o ponto da curva $y^2 = 2x^3$ onde a sua tangente é perpendicular à recta $4x-3y+2 = 0$.

Resolução. Seja $\omega = \alpha_1 - \alpha_2$ o ângulo formado por duas curvas num ponto com as coordenadas, por exemplo, $(x_0; y_0)$. Então,

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Para o caso concreto deste exercício temos $\omega = \dfrac{\pi}{2}$. Já que $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} = \infty$ vemos, que

$$1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = 0, \quad \text{isto é,} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Vamos reescrever a equação da recta $4x - 3y + 2 = 0$ na sua forma canónica: $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}$. Seja $\operatorname{tg} \alpha_2 = \dfrac{4}{3}$, onde α_2 é o ângulo formado entre a recta $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{3}$ e o eixo das abscissas. Por outro lado temos que $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = -\dfrac{3}{4}$, onde α_1 é o ângulo formado entre a tangente à curva $y^2 = 2x^3$ e o eixo das abscissas. Vamos achar a derivada desta função:

$$2yy' = 6x^2 \Longrightarrow y' = 3\frac{x^2}{y}.$$

Assim,

$$y'(x_0) = 3\frac{x_0^2}{y_0} = \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{3}{4},$$

portanto, $x_0^2 = -\dfrac{y_0}{4}$. O ponto $(x_0; y_0)$ determinamos a partir da equação da recta

$$4x - 3y + 2 = 0$$

ou da equação da curva $y^2 = 2x^3$. Assim,

$$y_0^2 = 2x_0^3 \Longrightarrow (-4x_0^2)^2 = 2x_0^3 \Longrightarrow x_0 = \frac{1}{8}, \; y_0 = -\frac{1}{16}. \quad \square$$

12) Um ponto material move-se segundo a lei $s = \dfrac{t^3}{3} + 2t^2 - t$, onde s exprime-se em metros, t em segundos. Calcule a velocidade e aceleração do ponto, um segundo após o começo do movimento.

Resolução. A velocidade de um movimento rectilíneo é igual a derivada da função espaço em relação ao tempo. Assim, $v(t) = \dfrac{dS(t)}{d(t)} = t^2 + 4t - 1$. Daqui concluímos que

$$v(1) = 1 + 4 - 1 = 4 \text{ m/s}.$$

A aceleração de um movimento rectilíneo é igual a derivada da função velocidade em relação ao tempo. Assim,

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 2t + 4.$$

Daqui tirámos que $a(1) = 2 + 4 = 6$. $\square$

13) Um ponto material movimenta-se pelo eixo das abscissas segundo a lei

$$x(t) = \frac{1}{4}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t).$$

Em que momento o ponto estará em repouso?

Resolução. A velocidade obtemos ao diferenciar a função espaço em relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = t^3 - 3t^2 + t - 3.$$

O corpo quando estiver em repouso terá velocidade nula. Deste modo, resolvendo a equação $t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0$ obtemos que depois de 3 segundos o corpo está em repouso. □

14) O raio da base de um cilindro aumenta com a velocidade de 3cm/s e a altura diminui com uma velocidade de 2cm/s. Ache a velocidade de variação do volume do cilindro.

Resolução. A fórmula que permite calcular o volume de um cilindro de raio r e altura h é $V = \pi r^2 h$. Já que o raio e a altura variam em relação ao tempo, então elas são funções do tempo, isto é, $r = r(t)$ e $h = h(t)$. Assim, $V(t) = \pi r^2(t) h(t)$. Derivando esta função volume em relação à t temos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \pi \left[2r(t)\frac{dr(t)}{dt} h(t) + r^2(t) \frac{dh(t)}{dt} \right].$$

Pelas condições do exercício temos $\frac{dr(t)}{dt} = 3\text{cm/s}$ e $\frac{dh(t)}{dt} = -2\text{cm/s}$ (aqui o sinal negativo deve-se ao facto da velocidade de variação da altura, segundo o exercício, diminuir). Colocando estes dados na fórmula acima obtida temos que $\frac{dV(t)}{dt} = \pi[6r(t)h(t) - 2r^2(t)]$. □

3.3 Perguntas de controle

1) Qual é o significado físico da derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0?

2) Que movimento dum ponto material descreve a equação $y = v_0 t + y_0$, onde t é o tempo, v_0 e y_0 são constantes?

3) Qual é o sentido geométrico da derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0?

3.4 Exercícios propostos

1) Pelos pontos $A(2;4)$ e $B(2+\Delta x; 4+\Delta y)$ da curva $y = x^2$ passa a secante AB. Ache o seu coeficiente angular. Qual é o valor do coeficiente angular da tangente à curva $y = x^2$ no ponto A?

2) O segmento $1 \leq x \leq 1+h$ do eixo OX, com ajuda da função $y = x^3$, aplica-se no eixo OY. Ache o coeficiente médio de alargamento e calcule-o se $h = 0.001$. Qual é o valor do coeficiente de alargamento, segundo esta aplicação, no ponto $x = 1$?

3) A lei de movimento de um ponto pelo eixo OX dá-se pela fórmula $x = 10t + 5t^2$, onde t é o tempo em segundos e x é a distância em metros. Ache a velocidade média no intervalo $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ e calcule-a se $\Delta t = 0.01$. Qual será a velocidade do ponto, quando $t = 20$?

4) Escreva as equações da tangente e da normal à curva $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ nos pontos:

   (a) $A(-1;0)$;

   (b) $B(2;3)$;

   (c) $C(3;0)$.

5) Em que pontos da curva $y = 2 + x - x^2$ a sua tangente é paralela ao eixo das abscissas? E em que ponto a tangente é paralela à bissectriz do primeiro quadrante?

6) Qual é o ângulo de intersecção da curva $y = \ln x$ com o eixo das abscissas?

7) Qual é o ângulo de intersecção das curvas $y = x^2$ e $x = y^2$?

8) Demonstre que na parábola $y^2 = 2px$:

   (a) a subtangente é igual ao dobro da abscissa do ponto tangencial;

   (b) a subnormal é constante.

9) Qual deverá ser a relação entre os coeficientes a, b e c de modo que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ seja tangencial ao eixo das abscissas?

10) Mostre que as famílias de hipérboles $x^2 - y^2 = a$ e $xy = b$ formam uma rede ortogonal, isto é, as curvas destas famílias se intersectam sob o ângulo de 90 graus.

11) Escreva as equações da tangente e da normal à curva $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ no ponto $t = 0$.

12) Escreva as equações da tangente e da normal às curvas:

(a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ no ponto $M(6; 6.4)$;

(b) $xy + \ln y = 1$ no ponto $M(1; 1)$.

13) Um corpo, cuja a massa é 25kg, move-se rectilíneamente segundo a lei $S(t) = \ln(1 + t^2)$. Ache a energia cinética do corpo $\left(E_c = \dfrac{1}{2}mv^2\right)$ dentro de 2 segundos depois do início do movimento.

14) O raio de um círculo varia com a velocidade de 5cm/s. Com que velocidade varia o seu perímetro?

15) O lado de um quadrado aumenta com a velocidade de 3cm/s. Qual será a velocidade de variação da área do quadrado no momento em que o seu lado fôr igual a 4cm?

Módulo 4

Derivadas e diferenciais de ordem superior

4.1 Resumo teórico

Seja $f'(x)$ a derivada da função $y = f(x)$ e suponhamos que esta derivada está definida numa certa vizinhança do ponto x_0. À expressão

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x},$$

caso exista, chamaremos **derivada de segunda ordem** da função $f(x)$. A denotação usada é: $f''(x_0)$ ou $f^{(2)}(x_0)$ ou $\left.\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$. A derivada de terceira ordem define-se como derivada da segunda derivada. Se é conhecida a derivada de $(n-1)$- ésima ordem e ela tem derivada no ponto x_0, então tal derivada chama-se **derivada de** n**- ésima ordem** da função $f(x)$ no ponto x_0. A denotação usada é: $f^{(n)}(x_0)$ ou $\left.\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0}$. Uma função que possui a n- ésima derivada no ponto x_0 chama-se n **vezes diferenciável**.

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções n vezes diferenciáveis. Então, tem lugar a fórmula de Leibniz[1]:

$$[u(x)v(x)]' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x),$$

onde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. A expressão

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$$

chamaremos **diferencial de** n**- ésima ordem**.

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) — matemático alemão

4.2 Exercícios resolvidos

1) Ache $y''(x)$, se:

(a) $y(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x| < 1)$;

Resolução. Achamos, primeiro, a derivada $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{x'\sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Vamos achar $y''(x)$ e, para tal, começamos por logaritmizar a igualdade

$$y'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

isto é,

$$\ln y'(x) = -\frac{3}{2}\ln(1-x^2).$$

Derivando ambos os lados temos:

$$\frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{3x}{1-x^2} \Longrightarrow y''(x) = \frac{3x}{1-x^2}y'(x) = \frac{3x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}. \quad \square$$

(b) $y(x) = e^{-x^2}$;

Resolução. Achamos a derivada de segunda ordem por etapas. Primeiro, vamos procurar a derivada de primeira ordem. Assim,

$$y'(x) = (e^{-x^2})' = (-x^2)'e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}.$$

Agora, finalmente, calculamos a derivada de segunda ordem:

$$y''(x) = [y'(x)]' = (-2xe^{-x^2})' = -2[x'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})'] = 2e^{-x^2}(2x^2-1). \quad \square$$

(c) $y(x) = \ln f(x)$;

Resolução. Vamos considerar $y(x)$ como uma função composta. Assim,

$$y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Longrightarrow y''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}. \quad \square$$

2) Sejam $u = \phi(x)$ e $v = \psi(x)$ funções duas vezes diferenciáveis. Ache $y''(x)$, se $y = u^2v^3$.

Resolução. Achamos, primeiro, $y'(x)$:

$$y' = (u^2v^3)' = 2uu'v^3 + 3u^2v'v^2 = uv(2u'v^2 + 3uvv').$$

Agora vamos diferenciar $y'(x)$, isto é,

$$(y')' = (u'v + uv')(2u'v^2 + 3uvv') + uv(2u''v^2 + 4u'v'v + 3u'v'v + 3uv'^2 + 3uvv'') =$$

$$= 2u'^2v^3 + 2uu''v^3 + 12uu'v^2v' + 6u^2vv'^2 + 3u^2v^2v''. \quad \square$$

3) Seja $f(x)$ uma função três vezes diferenciável. Ache $y'''(x)$, se $y(x) = f(e^x)$.

Resolução. Vamos achar a derivada por etapas:

$$y'(x) = f'(e^x)(e^x)' = f'(e^x)e^x;$$

$$y''(x) = [f'(e^x)e^x]' = f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x;$$

$$y'''(x) = [f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x]' =$$

$$= f'''(e^x)e^{3x} + 2f''(e^x)e^{2x} + f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^{2x} =$$

$$= f'''(e^x)e^{3x} + 3f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^{2x}. \quad \square$$

4) Ache $y^{(10)}(x)$, se $y(x) = x^2e^{3x}$.

Resolução. Primeiro, calculamos as derivadas de vária ordem para x^2 e e^{3x}:

$$(x^2)' = 2x,\ (x^2)'' = 2,\ (x^2)^{(k)} = 0 \quad \text{se} \quad k \geq 3,$$

$$(e^{3x})' = 3e^{3x},\ (e^{3x})'' = 3^2e^{3x}, \ldots, (e^{3x})^{(k)} = 3^ke^{3x}.$$

Vamos aplicar a fórmula de Leibniz:

$$y^{(10)}(x) = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (x^2)^{(k)}(e^{3x})^{(10-k)} =$$

$$\binom{10}{0} x^2(e^{3x})^{(10)} + \binom{10}{1}(x^2)'(e^{3x})^{(9)} + \binom{10}{2}(x^2)''(e^{3x})^{(8)} +$$

$$+\binom{10}{3}(x^2)^{(3)}(e^{3x})^{(7)} + \cdots + \binom{10}{10}(x^2)^{(10)}e^{3x}.$$

Já que, para $k \geq 3$, temos $(x^2)^{(k)} = 0$, então

$$y^{(10)}(x) = \binom{10}{0} x^2(e^{3x})^{(10)} + \binom{10}{1}(x^2)'(e^{3x})^{(9)} + \binom{10}{2}(x^2)''(e^{3x})^{(8)} =$$

$$= 3^{10}x^2e^{3x} + 2 \cdot 10 \cdot 3^9 \cdot xe^{3x} + 45 \cdot 2 \cdot 3^8e^{3x} = 3^9e^{3x}(3x^2 + 20x + 30). \quad \square$$

5) Ache $d^n y$ para a função $y = e^x$.

Resolução. Por definição, $d^n y = y^{(n)} dx^n$. Sabemos que $(e^x)^{(n)} = e^x$, portanto $d^n(e^x) = e^x dx^n$. $\square$

6) Ache $d^5 y$ para a função $y = x^5$.

Resolução. Por definição, $d^5 y = y^{(5)} dy^5 = 120 dy^5$. $\square$

7) Ache y''_{xx} para a função $y = y(x)$ dada na forma paramétrica:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Resolução. Vamos achar a derivada por etapas. Calculamos, primeiro,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{a\cos t}{a\sin t} = -\operatorname{ctg} t;$$

então

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{(\operatorname{ctg} t)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \quad \square$$

8) Seja $f(x)$ uma função duas vezes diferenciável e definida em $x \le x_0$. Como deveremos escolher os coeficientes a, b e c de modo que a função

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \le x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c & \text{se} \quad x > x_0 \end{cases}$$

seja duas vezes diferenciável?

Resolução. Temos que investigar se a função é duas vezes diferenciável no ponto $x = x_0$, que suscita dúvidas. Para que a função $F(x)$ seja duas vezes diferenciável temos de verificar se:

(a) $F(x)$ é contínua no ponto x_0, isto é,

$$F_+(x_0) = F_-(x_0) = F(x_0)?$$

Temos:

$$F_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{x \to x_0} [a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c] = c,$$

$$F_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} F(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

portanto, $F(x)$ é contínua se $f(x_0) = c$;

(b) $F(x)$ tem derivada de primeira ordem no ponto x_0, isto é,

$$F'_+(x_0) = F'_-(x_0) = F'(x_0)?$$

Temos:

$$F'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c-c}{x-x_0} = b,$$

$$F'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0),$$

portanto, $F(x)$ tem derivada se $f'(x_0) = b$;

(c) $F(x)$ tem derivada de segunda ordem no ponto x_0, isto é,

$$F''_+(x_0) = F''_-(x_0) = F''(x_0)?$$

Temos:

$$F''_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{F'_+(x)-F'_+(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2a(x-x_0)+b-b}{x-x_0} = 2a,$$

$$F''_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{F'_-(x)-F'_-(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0),$$

portanto, $F(x)$ tem derivada de segunda ordem se $\frac{1}{2}f''(x_0) = a$. $\square$

9) Mostre que a função

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

satisfaz a equação

$$y''(x) - (\lambda_1+\lambda_2)y'(x) + \lambda_1\lambda_2 y(x) = 0,$$

onde C_1 e C_2 são constantes quaisquer, λ_1 e λ_2 são constantes.

Resolução. Precisamos de achar y' e y'' e, seguidamente, colocar na equação. Assim,

$$y'(x) = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x},$$

$$y''(x) = C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}.$$

Em conclusão temos:

$$(C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}) - (\lambda_1+\lambda_2)(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}) + \lambda_1\lambda_2(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}) = 0,$$

portanto, $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ é solução. $\square$

10) Os polinómios de Tshebishëv[2]- Laguerre[3]definem-se pelas fórmulas

$$L_m(x) = e^x(x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ache explícitamente $L_m(x)$.

Resolução. Basta aplicar a fórmula de Leibniz e diferenciarmos m-vezes a função $x^m e^{-x}$:

$$(x^m e^{-x})^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (x^m)^{(k)} (e^{-x})^{(m-k)}.$$

Calculando, à parte, $(x^m)^{(k)}$ e $(e^{-x})^{(l)}$ temos:

$$(x^m)' = mx^{m-1} \Longrightarrow (x^m)'' = m(m-1)x^{m-2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x^m)^{(k)} = m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}, \quad 0 \le k \le m,$$

$$(e^{-x})' = -e^{-x} \Longrightarrow (e^{-x})'' = (-1)^2 e^{-x} \Longrightarrow (e^{-x})^{(l)} = (-1)^l e^{-x}.$$

Assim,

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}. \quad \square$$

4.3 Perguntas de controle

1) Defina derivada de segunda ordem.

2) Dê um exemplo duma função $f(x)$que tem derivada de primeira ordem $f'(x_0)$, mas não tem derivada de segunda ordem $f^{(2)}(x_0)$.

3) Usando o método de indução matemática, demonstre a regra para se achar a n- ésima derivada duma soma de duas funções.

4) Demonstre a fórmula de Leibniz.

5) Defina diferencial de n- ésima ordem.

---

[2]Pafnutiĭ L'vovitch Tshebishëv (1821–1894) — matemático russo
[3]Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886) — matemático francês

4.4 Exercícios propostos

1) Ache $y''(x)$, se:

(a) $y(x) = \operatorname{tg} x$;

(b) $y(x) = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$.

2) Sejam $u = \phi(x)$ e $v = \psi(x)$ funções duas vezes diferenciáveis. Ache $y''(x)$, se:

(a) $y = u^2$;

(b) $y = \ln \dfrac{u}{v}$;

(c) $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

3) Seja $f(x)$ uma função três vezes diferenciável. Ache $y'''(x)$, se:

(a) $y(x) = f(x^2)$;

(b) $y(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

(c) $y(x) = f(\ln x)$.

4) Ache d^2y para $y = \sin x$.

5) Ache d^2y, se:

(a) $y = \sqrt{1 + x^2}$;

(b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

(c) $y = x^x$.

6) Sejam u e v funções duas vezes diferenciáveis. Ache d^2y, se:

(a) $y = uv$;

(b) $y = u^m v^n$;

(c) $y = \dfrac{u}{v}$;

(d) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$.

7) Ache y''_{x^2} para as funções dadas na forma paramétrica:

(a) $x(t) = 2t - t^2, \quad y(t) = 3t - t^3$;

(b) $x(t) = f'(t), \quad y(t) = tf'(t) - f(t)$.

8) Ache $y^{(6)}$ e $y^{(7)}$, se $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$.

9) Ache $y^{(3)}$, se $y = ax^{-m}$.

10) Ache $y^{(20)}$, se $y = x^2e^{2x}$.

11) Ache $y^{(100)}$, se $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

12) Ache $y^{(10)}$, se $y = \dfrac{e^x}{x}$.

13) Ache:

(a) d^5y, se $y = x^5$;

(b) $d^{10}y$, se $y = x\cos 2x$;

(c) d^4y, se $y = e^x \ln x$.

14) Mostre que a função $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1)$ satisfaz a equação $y'' + y = 0$.

15) Mostre que o polinómio de Tshebishëv

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x), \quad m = 1, 2, \ldots$$

satisfaz a equação

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

16) Mostre que o polinómio de Legendre[4]

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

satisfaz a equação

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

[4]Adrien Marie Legendre (1752–1883) — matemático francês

Módulo 5

Teoremas sobre funções diferenciáveis

5.1 Resumo teórico

Seja $f : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^1$, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^1$, $x_0 \in \mathrm{E}$. Diremos que a função $f(x)$ é **crescente** (**decrescente**) no ponto x_0 se existe uma vizinhança de x_0 onde $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$, se $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, se $x < x_0$.

Teorema 9. *Se a função $f(x)$ é diferenciável no ponto x_0 e $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, então $f(x)$ é crescente (decrescente) no ponto x_0.*

Diremos que a função $f(x)$ é **estritamente crescente** (**crescente**) no intervalo $[a, b] \subset \mathrm{E}$, se para quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$, implica que $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$. Diremos que a função $f(x)$ é **estritamente decrescente** (**decrescente**) no intervalo $[a, b] \subset \mathrm{E}$ se para quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$, implica que $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Teorema 10. *Suponhamos que $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $f(x)$ é crescente (decrescente) em $[a, b]$;

2) $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) em (a, b).

Teorema 11. *(de Rolle[1]) Suponhamos que a função $f(x)$ satisfaz as seguintes condições:*

1) $f(x)$ é contínua em $[a, b]$;

2) $f(x)$ é diferenciável em (a, b);

[1] Michel Rolle (1652–1719) — matemático francês

3) $f(a) = f(b)$.

Então, existe um $\zeta \in (a, b)$ *tal que* $f'(\zeta) = 0$.

Teorema 12. *(de Lagrange[2]) Suponhamos que a função* $f(x)$ *satisfaz as seguintes condições:*

1) $f(x)$ *é contínua em* $[a, b]$*;*

2) $f(x)$ *é diferenciável em* (a, b).

Então, existe um $\zeta \in (a, b)$ *tal, que* $f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b - a)$.

Teorema 13. *(de Cauchy) Suponhamos que as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *satisfazem as seguintes condições:*

1) $f(x)$ *e* $g(x)$ *são contínuas em* $[a, b]$*;*

2) $f(x)$ *e* $g(x)$ *são diferenciáveis em* (a, b)*;*

3) $g'(x) \neq 0$ *em* (a, b).

Então, existe um $\zeta \in (a, b)$ *tal, que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Seja $f(x)$ uma função n-vezes diferenciável no ponto x_0. O polinómio

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

chama-se **polinómio de Taylor**[3] para a função $f(x)$, com centro no ponto x_0. No caso particular, quando $x_0 \equiv 0$, então o polinómio chama-se **polinómio de Maclaurin**[4]. Diremos que $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Teorema 14. *Seja* $f(x)$ *uma função definida numa certa vizinhança do ponto* x_0 *e* n*-vezes diferenciável neste ponto. Então,*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o[(x - x_0)^n]. \tag{5.1}$$

[2]Joseph Louis de Lagrange (1736–1813) — matemático francês
[3]Brook Taylor (1685–1731) — matemático inglês
[4]Colin Maclaurin (1698–1746) — matemático escocês

Esta fórmula chama-se **fórmula de Taylor com resto na forma de Peano**[5].

Teorema 15. *Seja $f(x)$ uma função $(n+1)$ vezes diferenciável numa certa vizinhança do ponto x_0. Então,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{5.2}$$

onde $\zeta = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$.

A fórmula (5.2) chama-se fórmula de Taylor, para a função $f(x)$, com resto na forma de Lagrange.

Teorema 16. *(de L'Hospital[6]) Suponhamos que se cumprem as seguintes condições:*

1) *as funções $f(x)$ e $g(x)$ estão definidas e são diferenciáveis numa certa vizinhança do ponto x_0 com excepção, talvez, do próprio ponto x_0;*

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0$ *na vizinhança do ponto x_0 com excepção, talvez, do próprio ponto x_0;*

4) *existe* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Então,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.2 Exercícios resolvidos

1) Verifique o cumprimento do teorema de Rolle, para a função

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Resolução. Vamos verificar o cumprimento das condições do teorema de Rolle em dois intervalos, nomeadamente $[1,2]$ e $[2,3]$:

(a) $f(x)$ é contínua em $[1,2]$ e $[2,3]$;

(b) $f(x)$ é diferenciável em $(1,2)$ e $(2,3)$;

[5] Giuseppe Peano (1858–1932) — matemático italiano

[6] Guillaume Francois A. de L'Hospital (1661–1704) — matemático francês

(c) $f(1) = f(2) = 0$ e $f(2) = f(3) = 0$.

Então, existe um $\zeta_1 \in (1,2)$ e $\zeta_2 \in (2,3)$ tais, que $f'(\zeta_i) = 0$, $i = 1,2$. Vamos achar ζ_1 e ζ_2. Começamos por derivar $f(x)$ e igualar a zero:

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = 3x^2 - 12x + 11 = 0.$$

Resolvendo esta equação quadrática obtemos

$$\zeta_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \zeta_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \Box$$

2) A função $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ anula-se nos pontos $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, mas $f'(x) \neq 0$ no intervalo $[-1,1]$. Explique a "contradição" aparente do teorema de Rolle.

Resolução. Vamos verificar qual das condições do teorema de Rolle não se cumpre. Vimos que $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(x)$ é contínua no segmento $[-1,1]$. Vamos verificar se ela é diferenciável em $(-1,1)$. Calculando a derivada de $f(x)$ temos:

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

No ponto $x = 0 \in (-1,1)$ constatamos que $f'(0)$ não existe, portanto, $f(x)$ não é diferenciável no intervalo $(-1,1)$ o que, consequentemente, viola uma das condições do teorema de Rolle, explicando deste modo a "contradição" aparente do teorema. $\Box$

3) Na curva $y = x^3$ ache o ponto onde a tangente é paralela à corda que une os pontos $A(-1;1)$ e $B(2;8)$.

Resolução. A corda que une os pontos A e B tem coeficiente angular igual à

$$\frac{y(2) - y(-1)}{2 - (-1)} = 3.$$

Já que a tangente à curva é paralela à corda, então existe um $\zeta \in (-1,2)$ tal que $y'(\zeta) = 3$. Resolvendo esta equação obtemos $\zeta = 1$. Em conclusão, o ponto onde a tangente à curva é paralela à corda é $(1;1)$. $\Box$

4) Ache o(s) intervalo(s) de monotonia da função $f(x) = 3x - x^3$.

Resolução. Vamos, primeiro, derivar $f(x)$:

$$f(x) = 3x - x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3 - 3x^2.$$

Sabemos que se $f'(x) = 3 - 3x^2 > 0$, então a função $f(x)$ é crescente. Resolvendo a desigualdade $3-3x^2 > 0$ temos que $x \in (-1,1)$. Portanto, $f(x) = 3x - x^3$ é crescente no intervalo $(-1,1)$. Se $f'(x) = 3-3x^2 < 0$, então $f(x) = 3x-x^3$ é decrescente. Resolvendo a desigualdade $3-3x^2 < 0$ temos que $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Portanto, $f(x) = 3x-x^3$ é decrescente no intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. $\square$

5) Demonstre que $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$, quaisquer que sejam $x,\ y \in \mathbb{R}^1$.

Resolução. A função $f(x) = \cos x$ é contínua no intervalo $[x,y] \subset \mathbb{R}^1$ e diferenciável em (x,y). Então, pelo teorema de Lagrange, existe um $\zeta \in (x,y)$ tal, que

$$\cos y - \cos x = -\sin\zeta \cdot (x-y).$$

Assim, $|\cos y - \cos x| = |-\sin\zeta\cdot(x-y)| \leq |x-y|$, quaisquer que sejam $x,\ y \in \mathbb{R}^1$. $\square$

6) Ache o(s) ponto(s) ζ, na fórmula de Lagrange, para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0.5(3-x^2) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad 1 < x < +\infty \end{cases}$$

no segmento $[0,2]$.

Resolução. Temos $f(2) = 0.5$, $f(0) = 1.5$. Assim,

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{0.5-1.5}{2} = -0.5 = f'(\zeta).$$

A derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Resolvendo a equação $f'(\zeta) = -0.5$ temos:

$$-\zeta = -0.5 \Longrightarrow \zeta = 0.5$$

e

$$-\frac{1}{\zeta^2} = -0.5 \Longrightarrow \zeta = \pm\sqrt{2}.$$

Portanto $\zeta = 0.5$ e $\zeta = \sqrt{2}$. $\square$

7) Diga se a fórmula de Cauchy, para as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, é justa no segmento $[-1, 1]$.

   Resolução. A fórmula de Cauchy não se cumpre, pois $g'(x) = 3x^2$ anula-se no ponto $x = 0 \in (-1, 1)$. $\square$

8) Usando a regra de L'Hospital calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}.$$

   Resolução. Fácilmente se verifica que temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Pelo teorema de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \cos \alpha x \cos^2 \beta x}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad \square$$

9) Usando a regra de L'Hospital calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

   Resolução. Temos aqui uma indeterminação do tipo $0/0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \div 3x^2 = \frac{0}{0}!!$$

   Voltamos a aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{6x} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

10) Decomponha o polinómio $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ segundo potências de $x + 1$.

   Resolução. Se a decomposição é feita segundo potências de $x + 1 = x - (-1)$ vemos, que $x_0 = -1$. Vamos usar a fórmula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!} (x + 1)^k.$$

   Temos que achar $P^{(k)}(-1)$, $k = 0, 1, 2, 3$ e colocar nesta fórmula. Assim,

$$P(-1) = 1 + 3(-1) + 5(-1)^2 - 2(-1)^3 = 1 - 3 + 5 + 2 = 5;$$

$$P'(x) = 3 + 10x - 6x^2 \Longrightarrow P'(-1) = 3 + 10(-1) - 6(-1)^2 = 3 - 10 - 6 = -13;$$

$$P''(x) = 10 - 12x \Longrightarrow P''(-1) = 10 - 12(-1) = 22; P^{(3)}(x) = -12.$$

Portanto,

$$1 + 3x + 5x^2 - 2x^3 = 5 - \frac{13}{1!}(x+1) + \frac{22}{2!}(x+1)^2 - \frac{12}{3!}(x+1)^3 =$$

$$= 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3. \quad \square$$

11) Decomponha a função $f(x) = e^{2x-x^2}$ em potências de x até x^3.

Resolução. Vamos usar a fórmula de Maclaurin para o caso quando $n = 3$ e o resto na forma de Peano, isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^3).$$

Temos:

$$f(0) = 1; \quad f'(x) = (2 - 2x)e^{2x-x^2} \Longrightarrow f'(0) = 2;$$

$$f''(x) = -2e^{2x-x^2} + (2 - 2x)^2 e^{2x-x^2} \Longrightarrow f''(0) = -2 + 4 = 2;$$

$$f^{(3)}(x) = -2(2-2x)e^{2x-x^2} - 2^2(2-2x)e^{2x-x^2} + (2-2x)^3 e^{2x-x^2} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = -4-8+8 = -4.$$

Portanto,

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3). \quad \square$$

12) Decomponha a função $f(x) = e^x$ em potências de x e apresente o resto na forma de Lagrange.

Resolução. Vamos usar a fórmula

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Vemos que

$$f^{(k)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(k)}(0) = 1.$$

Assim,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad \square$$

13) Avalie o erro absoluto da fórmula

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Resolução. Na realidade pede-se para avaliar a diferença

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| = |R_{n+1}(x)|, \quad 0 \le x \le 1.$$

Com base no exercício anterior temos:

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \le \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}. \quad \square$$

14) Calcule aproximadamente $\sqrt{e}$.

Resolução. Com base no exercício anterior, colocando $x = \frac{1}{2}$ e tendo em conta a desigualdade $n! > 2^{n-1}$ para $n \ge 3$, temos:

$$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1}{2^n \cdot n!} \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{2n}})}{1 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{2}{3} \approx 1.66. \quad \square$$

15) Decomponha a função $f(x) = \sin x$ em potências de x e apresente o resto na forma de Lagrange.

Resolução. Primeiro achamos sucessivamente $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow f''(0) = 0;$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow f^{(3)}(0) = -1;$$

de modo geral temos:

$$f^{(2n-1)}(x) = \sin\left[x + (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow f^{(2n-1)}(0) = \sin\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{n-1}.$$

Deste modo,

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sin(\theta x + n\pi)\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad \square$$

5.3 Perguntas de controle

1) Defina função crescente num ponto.

2) Formule o teorema sobre a condição suficiente de crescimento duma função no ponto.

3) Se uma função é crescente no ponto x_0, é correcto afirmar que ela tem neste ponto derivada positiva?

4) Formule o teorema de Lagrange.

5) Formule o teorema de Cauchy.

6) Diga o que é polinómio de Taylor com centro no ponto x_0.

7) Formule o teorema sobre a fórmula de Taylor, com resto na forma de Peano.

8) Escreva a fórmula de Maclaurin para a função $f(x)$, com resto na forma de Lagrange.

9) Formule a regra de L'Hospital.

5.4 Exercícios propostos

1) Ache os intervalos de monotonia das funções:

   (a) $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a > 0$;

   (b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$.

2) Usando a fórmula de Lagrange mostre a desigualdade

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^1.$$

3) Decomponha $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$ até x^4.

4) Decomponha $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$ $(a > 0)$ até x^2.

5) Decomponha $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 0)$ até $\dfrac{1}{x^3}$.

6) Seja $f(x)$ uma função duas vezes diferenciável, $f(0) = f(1) = 0$, $|f''(x)| \leq A$ qualquer que seja $x \in (0,1)$. Demonstre que $|f'(0)| \leq \dfrac{A}{2}$.

7) Avalie o erro absoluto das fórmulas:

   (a) $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}, \quad 0 \leq x \leq 1$;

   (b) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}, \quad |x| \leq \dfrac{1}{2}$;

   (c) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3}, \quad |x| \leq 0.1$;

   (d) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}, \quad 0 \leq x \leq 1$.

8) Para que valores de x é justa, com exactidão até 0.0001, a fórmula $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}$?

9) Com ajuda da fórmula de Taylor calcule aproximadamente:

   (a) $\sqrt[3]{30}$;

   (b) $\sqrt{e}$;

   (c) $\sin 18$;

   (d) $\ln 1.2$.

10) Calcule e com exactidão até 10^{-9}.

11) Calcule $\sqrt{5}$ com exactidão até 10^{-4}.

12) Usando a regra de L'Hospital calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$;

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

Módulo 6

Esquema geral de estudo duma função

6.1 Resumo teórico

Seja $f : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^1$, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^1$. A recta $x = c$ é **assímptota vertical** do gráfico da função $f(x)$ se pelo menos um dos limites $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ é igual à $+\infty$ ou $-\infty$. A recta $y = \alpha$ é **assímptota horizontal** do gráfico da função $f(x)$ se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \alpha$. A recta $y = kx + b$ é **assímptota oblíqua** da função $f(x)$ se $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, onde $\alpha(x) \to 0$, quando $x \to +\infty$. Os coeficientes k e b calculam-se do seguinte modo:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx].$$

Do mesmo modo se define a assímptota oblíqua, quando $x \to -\infty$. Diremos que a função $f(x)$ atinge no ponto $x_0 \in \mathrm{E}$ o seu **máximo local** (**mínimo local**) se existe uma vizinhança $U(x_0)$ de x_0 tal que $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ qualquer que seja $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Teorema 17. *(de Fermat[1]) Se a função $f(x)$ atinge no ponto x_0 um máximo ou mínimo local, então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.*

Teorema 18. *Suponhamos que no ponto x_0 a função $f(x)$ atinge um máximo (mínimo) local e que nesse ponto $f(x)$ tem derivada de segunda ordem. Então $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$.*

Diremos que o gráfico da função $f(x)$ tem no intervalo $(a, b) \subset \mathrm{E}$ uma **concavidade virada para baixo** (**cima**) se neste intervalo (a, b) este gráfico se encontra abaixo (acima) de qualquer tangente. Se $f(x)$ é duas vezes diferenciável nesse intervalo (a, b), então $f''(x) < 0$ no caso da concavidade estar virada para baixo ou $f''(x) > 0$ no caso da concavidade estar virada

[1] P. Fermat (1601–1665) — matemático francês

para cima. O ponto onde a concavidade muda de orientação chama-se **ponto de inflexão**. Se $(x_0, f(x_0))$ é o ponto de inflexão do gráfico da função $f(x)$ e se existe derivada de segunda ordem, então $f''(x_0) = 0$.

Esquema geral de estudo de uma função $y = f(x)$

1) Achar o domínio de definição e estudar esta função nos pontos de descontinuidade e de fronteira.

2) Verificar a paridade da função.

3) Verificar periodicidade da função.

4) Achar as assímptotas verticais e oblíquas.

5) Achar os zeros da função.

6) Achar os pontos críticos, isto é, os pontos pertencentes ao domínio da função, onde a sua derivada se anula ou não existe.

7) Achar os intervalos de monotonia e extremos locais da função.

8) Achar os pontos de inflexão, isto é, os pontos onde a segunda derivada se anula ou não existe.

9) Achar os intervalos onde o gráfico tem concavidade virada para cima e para baixo.

10) Construir o gráfico da função.

6.2 Exercícios resolvidos

1) Ache os extremos locais das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

   Resolução. Começamos por achar o(s) ponto(s) estacionário(s) e, para tal, diferenciamos $f(x)$ e igualamos a sua derivada á zero:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

   Vamos agora achar a derivada de segunda ordem e calculá-la para os valores de $x = 1$ e $x = 3$:

$$f''(x) = 6x - 12 \Longrightarrow f''(1) = -6 < 0,\ f''(3) = 6 > 0$$

portanto, a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ atinge nos pontos $x = 1$ e $x = 3$ o seu máximo $f(1) = 0$ e o seu mínimo $f(3) = -58$, respectivamente. $\square$

(b) $f(x) = xe^{-x}$;

Resolução. Primeiro derivamos a função $f(x)$ e igualamos essa derivada à zero, para acharmos o(s) ponto(s) estacionário(s):

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 1.$$

Agora vamos achar $f''(1)$ de modo a podermos classificar o ponto estacionário $x = 1$, se é um ponto de mínimo ou máximo:

$$f''(x) = (x-1)e^{-x} - e^{-x} = (x-2)e^{-x} \Longrightarrow f''(1) = -e^{-1} < 0$$

portanto, $f(x) = xe^{-x}$ atinge no ponto $x = 1$ o seu máximo. $\square$

2) Ache o maior e menor valor (extremos absolutos) das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2^x, \quad x \in [-1, 5]$;

Resolução. A função $f(x) = 2^x$ é crescente, portanto atinge o seu mínimo no ponto $x = -1$ e o seu máximo no ponto $x = 5$. Em conclusão:

$$f_{min} = f(-1) = 2^{-1}, \quad f_{max} = f(5) = 2^5 = 32. \quad \square$$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 6,\ x \in [-3, 10]$;

Resolução. Achamos, inicialmente, o(s) ponto(s) estacionário(s):

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2 \in [-3, 10].$$

O maior e menor valor de $f(x) = x^2 - 4x + 6$ poderá atingir-se nos extremos do segmento $[-3, 10]$, isto é, nos pontos $x = -3$, $x = 10$ ou no ponto estacionário $x = 2$. Assim, calculando $f(-3) = 27$, $f(2) = 2$ e $f(10) = 66$ e comparando-os concluímos, que $f_{max} = 66$ e $f_{min} = 2$. $\square$

3) Faça o estudo geral da função $f(x) = 3x - x^3$.

Resolução.

(a) Domínio e zeros da função:

$$D_f = \mathbb{R}^1; \quad f(x) = 0 \Longrightarrow x(3 - x^2) = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad \pm\sqrt{3};$$

(b) paridade:

$$f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -(3x - x^3) = -f(x),$$

logo, $f(x) = 3x - x^3$ é ímpar;

(c) intervalos de monotonia e extremo(s) local:

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1,$$

$$f'(x) = 3 - 3x^2 > 0 \Longrightarrow x \in (-1, 1),$$
$$f'(x) = 3 - 3x^2 < 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Portanto, no intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ a função decresce e no intervalo $(-1, 1)$ a função cresce, atingindo um mínimo e máximo local nos pontos $x = -1$ e $x = 1$, respectivamente;

(d) concavidade e ponto(s) de inflexão:

$$f''(x) = -6x = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

$$f''(x) = -6x > 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, 0),$$
$$f''(x) = -6x < 0 \Longrightarrow x \in (0, +\infty).$$

Assim, no intervalo $(-\infty, 0)$ a função dada tem concavidade virada para cima, no intervalo $(0, +\infty)$ a função tem concavidade virada para baixo; o ponto de inflexão é $(0; 0)$.

Em conclusão, podemos resumir tudo isto na seguinte tabela:

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$	$\searrow, \cup$	0	$\searrow, \cup$	$\underset{min}{-2}$	$\nearrow, \cup$	0	$\nearrow, \cap$	$\underset{max}{2}$	$\searrow, \cap$	0	$\searrow, \cap$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

□

4) Faça o estudo geral da função $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

Resolução.

(a) Domínio e zeros da função:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}^1 : x+1 \neq 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty);$$

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 1;$$

(b) assímptotas:

i. assímptota vertical:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} = -\infty,$$

portanto, $x = -1$ é assímptota vertical;

ii. assímptota oblíqua:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(x-1)}{x(x+1)^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 - x}{(x+1)^2} = -3,$$

portanto, $y = x - 3$ é assímptota oblíqua;

(c) intervalos de monotonia e extremos locais:

$$f'(x) = \frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{3+\sqrt{17}}{2},\ x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-3+\sqrt{17}}{2},$$

$$f'(x) = \frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3} > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x \in I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\infty, -\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \cup (-1, 0) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right),$$

$$f'(x) = \frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3} < 0 \Longrightarrow x \in I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{3+\sqrt{17}}{2}, -1\right) \cup \left(0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Portanto, no intervalo I_1 a função cresce e no intervalo I_2 a função decresce, atingindo extremos locais nos pontos $x = 0,\ x = x_1,\ x = x_2$;

(d) concavidade e ponto(s) de inflexão:

$$f''(x) = \frac{10x-2}{(x+1)^4} = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{5},$$

$$f''(x) = \frac{10x-2}{(x+1)^4} > 0 \Longrightarrow x \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right),$$

$$f''(x) = \frac{10x-2}{(x+1)^4} < 0 \Longrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right).$$

Logo, no intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ a função dada tem concavidade virada para baixo, no intervalo $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ a função tem concavidade virada para cima; o ponto de inflexão é $(1/5; -1/45)$. □

5) De todos os rectângulos de área S_0 ache aquele cujo perímetro é menor.

Resolução. Denotemos por x e y os lados do rectângulo. Então,

$$S_0 = xy \Longrightarrow y = \frac{S_0}{x}.$$

O perímetro dum rectângulo é

$$P(x) = 2x + 2\frac{S_0}{x}.$$

Temos que achar os pontos de extremos para a função $P(x)$ e para tal vamos derivá-la e igualar a derivada à zero:

$$P'(x) = 2 - \frac{2S_0}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{S_0}.$$

Calculamos a segunda derivada:

$$P''(x) = \frac{4S_0}{x^3} \Longrightarrow P''(\sqrt{S_0}) = \frac{4}{\sqrt{S_0}} > 0,$$

portanto, a função $P(x)$ atinge o seu mínimo, quando $y = x = \sqrt{S_0}$, isto é, quando é um quadrado. □

6) Quais deverão ser as dimensões duma lata fechada de forma cilindrica de volume V_0, de modo que a sua superfície total seja mínima?

Resolução. Seja R e h o raio e a altura do cilindro. O volume do cilindro é dado pela fórmula:

$$V_0 = \pi R^2 h \Longrightarrow h = \frac{V_0}{\pi R^2}.$$

A superfície total de um cilindro fechado é

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{2V_0}{R}.$$

Vamos derivar a função S e igualar essa derivada à zero, de modo a acharmos os pontos estacionários:

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V_0}{R^2} = 0 \Longrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}.$$

As dimensões do cilindro, para que a sua superfície total seja mínima, deverão ser

$$R = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}, \quad h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}. \quad \square$$

7) Os gastos diários de navegação são compostos de duas partes: gastos fixos, iguais à L dólares e gastos variáveis, que aumentam proporcionalmente ao cubo da velocidade de navegação. Qual deverá ser a velocidade de navegação de modo que os gastos sejam mínimos?

Resolução. Suponhamos que o barco já navegou S km em T dias. Então, os gastos totais são dados pela fórmula

$$G = TL + kTv^3,$$

onde k é o coeficiente de proporcionalidade. Sabemos que $T = \dfrac{S}{v}$ daí, que

$$G(v) = \frac{S}{v}L + kSv^2.$$

Calculamos a primeira derivada de G e vamos achar os pontos estacionários:

$$G'(v) = -\frac{SL}{v^2} + 2kSv = 0 \Longrightarrow v = \sqrt[3]{\frac{L}{2k}}.$$

Portanto, para que os custos sejam mínimos a velocidade de navegação deverá ser de $v = \sqrt[3]{\dfrac{L}{2k}}$ km/dia. $\square$

6.3 Perguntas de controle

1) Defina assímptota oblíqua e vertical.

2) Defina máximo e mínimo local.

3) Formule o teorema sobre a condição necessária de extremo.

4) Formule o teorema sobre a condição suficiente de extremo.

5) Defina ponto de inflexão.

6) Enumere os passos mais importantes a dar quando se faz o estudo geral de uma função.

6.4 Exercícios propostos

1) Investigue os extremos das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2 + x - x^2$;

   (b) $f(x) = (x-1)^3$;

   (c) $f(x) = |x|$.

2) Ache os extremos das funções:

   (a) $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$;

   (b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$;

   (d) $f(x) = e^x \sin x$.

3) Ache o maior e o menor valor das seguintes funções:

   (a) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|,\ x \in [-10, 10]$.

   (b) $f(x) = \sqrt{5 - 4x},\ x \in [-1, 1]$.

4) Ache o maior e o menor valor das seguintes funções:

   (a) $f(x) = xe^{-0.01x},\ x \in (0, +\infty)$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4},\ x \in (0, +\infty)$;

   (c) $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

5) Faça o estudo geral da função $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{10}{3x^2} + \dfrac{1}{1-x}$.

6) Dada uma esfera de raio igual à R construa, dentro dela, um cilindro de máximo volume.

7) A fábrica A encontra-se do caminho de ferro, que vai do sul para o norte e que passa pela cidade B, a uma distância de a km. Sob que ângulo, em relação ao caminho de ferro, é preciso construir uma estrada que sai de A de modo que o custo de transporte de produtos de A para B seja mínimo, se sabemos que o preço de transporte ferroviário é igual à q dólares/km e o de transporte rodoviário é igual a p dólares/km?

Módulo 7

Primitiva e integral indefinido

7.1 Resumo teórico

Sejam $f, F : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^1$, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^1$. Suponhamos que $F(x)$ é uma função diferenciável em E. Diremos que $F(x)$ é **primitiva** da função $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$, qualquer que seja $x \in \mathrm{E}$.

Sejam $F_1(x)$ e $F_2(x)$ duas primitivas de $f(x)$, isto é,

$$F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x).$$

Então, $F_1(x) = F_2(x) + C$, onde C é uma constante qualquer. Ao conjunto de todas as primitivas da função $f(x)$ em E chamaremos **integral indefinido** da função $f(x)$. A denotação usada é $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, onde C é uma constante qualquer.

Vamos enumerar algumas propriedades do integral indefinido:

1) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)dx$;

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}^1$ (homogeneidade);

4) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ (linearidade).

Vejamos agora o integral de algumas funções com que nos deparamos constantemente:

1) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0);$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C;$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C;$

7) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1);$

8) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

9) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

7.2 Exercícios resolvidos

1) Ache $\displaystyle\int (3-x^2)^3\,dx.$

Resolução. Vamos desenvolver, primeiro, a expressão a ser integrada (o integrando) que é, nada mais nada menos, que o cubo de uma diferença. Assim, aplicando a fórmula

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

temos: $(3-x^2)^3 = 27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6$. Logo,

$$\int (3-x^2)^3\,dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)\,dx =$$

$$= \int 27\,dx - \int 27x^2\,dx + \int 9x^4\,dx - \int x^6\,dx =$$

$$= 27\int dx - 27\int x^2\,dx + 9\int x^4\,dx - \int x^6\,dx =$$

$$= 27x - 27\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + 9\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C. \quad \square$$

2) Ache $\displaystyle\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx$.

Resolução. Vamos desenvolver o integrando

$$(1-x)(1-2x)(1-3x) = 1 - 6x + 11x^2 - 6x^3.$$

Assim,

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx = \int (1 - 6x + 11x^2 - 6x^3)\,dx =$$

$$= \int dx - 6\int x\,dx + 11\int x^2\,dx - 6\int x^3\,dx =$$

$$= x - 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 11\frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\frac{x^{3+1}}{3+1} + C = x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C. \quad \square$$

3) Ache $\displaystyle\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx$, onde $a \in \mathbb{R}^1$.

Resolução. Neste exercício aplicamos primeiro as propriedades sobre linearidade e homogeneidade do integral indefinido, depois recorremos à tabela de integrais. Assim,

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx = \int \frac{a}{x}\,dx + \int \frac{a^2}{x^2}\,dx + \int \frac{a^3}{x^3}\,dx =$$

$$= a\int \frac{dx}{x} + a^2\int \frac{dx}{x^2} + a^3\int \frac{dx}{x^3} = a\ln|x| + a^2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + a^3\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C =$$

$$= a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C. \quad \square$$

4) Ache $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

Resolução. Pegamos a função a ser integrada e vamos fazer algumas transformações algébricas de modo a podermos usar a tabela de integrais. Assim,

$$\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} - 2\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} =$$

$$= \frac{x^{1/2}}{x^{1/4}} - 2\frac{x^{2/3}}{x^{1/4}} + \frac{1}{x^{1/4}} = x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[4]{x}}\, dx = \int \left(x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}\right) dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} - 2\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C. \quad \square$$

5) Ache $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$.

Resolução. Façamos algumas transformações algébricas no integrando:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{-1+1+x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + 1.$$

Agora é mais fácil achar o integral:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \int \left(-\frac{1}{1+x^2} + 1\right) dx = -\int \frac{dx}{1+x^2} + \int dx = -\operatorname{arctg} x + x + C. \quad \square$$

6) Ache $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$.

Resolução. Façamos algumas transformações algébricas no integrando de modo a que fácilmente possamos fazer uso da tabela de integrais. Assim,

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C. \quad \square$$

7) Ache $\displaystyle\int (2^x + 3^x)^2\, dx$.

Resolução. Primeiro desenvolvemos o integrando, que é o quadrado duma soma. Assim,

$$(2^x + 3^x)^2 = 4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x.$$

Deste modo temos:

$$\int (2^x + 3^x)\, dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x)\, dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2.6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{2\ln 3} + C. \quad \square$$

8) Ache $\int \mathrm{tg}^2 x \, dx$.

Resolução. Sabemos que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Dividindo tudo por $\cos^2 x$ temos:

$$\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Agora basta, sómente, integrar directamente usando a tabela:

$$\int \mathrm{tg}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C. \quad \square$$

7.3 Perguntas de controle

1) Diga o que entende por primitiva duma função.

2) Formule as propriedades do integral indefinido.

3) Enumere os principais integrais de tabela.

7.4 Exercícios propostos

1) Ache $\int x^2 (5 - x)^4 \, dx$.

2) Ache $\int \left(\frac{1 - x}{x} \right)^2 dx$.

3) Ache $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} \, dx$.

4) Ache $\int \frac{(1 - x)^3}{x \sqrt[3]{x}} \, dx$.

5) Ache $\int \frac{x^2}{1 - x^2} \, dx$.

6) Ache $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx$.

7) Ache $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} \, dx$.

8) Ache $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$.

Módulo 8

Métodos de integração

8.1 Resumo teórico

Teorema 19. *(método de decomposição) Sejam* $f,\ f_1,\ f_2 : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^1,\ \mathrm{E} \subset \mathbb{R}^1$. *Suponhamos que* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *em* E. *Então,*

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

Teorema 20. *(método de substituição) Seja* $x = \phi(t)$ *uma função definida e diferenciável em* $\mathrm{E}_t \subset \mathbb{R}^1$ *e seja* $\mathrm{E}_x \subset \mathbb{R}^1$ *o seu contradomínio. Seja* $y = f(x)$ *uma função definida em* E_x *e que possui, neste intervalo, primitiva* $F(x)$. *Então, em* E_t, *a função* $F[\phi(t)]$ *é primitiva de* $f[\phi(t)]\phi'(t)$, *isto é,*

$$\int f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt = F[\phi(t)] + C.$$

Com a ajuda do método de substituição obtêm-se as seguintes fórmulas, muito úteis e usadas frequentemente na integração:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0);$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Teorema 21. *(método de integração por partes) Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções*

$$u,\ v : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}^1, \quad \mathrm{E} \subset \mathbb{R}^1$$

e suponhamos que $u(x)$ e $v(x)$ sejam diferenciáveis em E*. Então*

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x).$$

É cómodo aplicar o método de integração por partes nos casos quando o integrando contém funções do tipo $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$, $\sin(\ln x)$, $\cos(\ln x)$ etc.

8.2 Exercícios resolvidos

1) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{x+a}$.

Resolução. Façamos a substituição $t = x + a$. Então $dt = d(x+a) = dx$. Deste modo temos:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C. \quad \square$$

2) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

Resolução. Vamos fazer a substituição $t = 2 - 5x$. Então,

$$dt = d(2-5x) = -5dx \Longrightarrow dx = -\frac{1}{5}dt.$$

Sendo assim temos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{2}{5}\sqrt{t} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C. \quad \square$$

3) Ache $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

Resolução. Fácilmente constata-se que $-\frac{1}{2}d(1-x^2) = xdx$, portanto, vamos fazer a substituição:

$$t = 1 - x^2 \Longrightarrow dt = -2xdx \Longrightarrow -\frac{1}{2}dt = xdx.$$

Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \quad \square$$

4) Ache $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,dx$.

Resolução. Façamos a substituição

$$t = x^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}dt = xdx.$$

Deste modo temos:

$$\int \frac{x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2^2+t^2} = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{2} + C. \quad \square$$

5) Ache $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$.

Resolução. Façamos a substituição $t = -x^2$. Então $-\dfrac{1}{2}dt = xdx$. Deste modo temos:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{e^t}{2} + C = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C. \quad \square$$

6) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Resolução. Temos $e^x + e^{-x} = e^{-x}(e^{2x}+1)$. Assim,

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^{-x}(1+e^{2x})} = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$$

Façamos agora a substituição $t = e^x$. Temos $dt = e^x dx$, portanto,

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}\,t + C = \mathrm{arctg}\,e^x + C. \quad \square$$

7) Ache $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Resolução. Vamos fazer a substituição $t = \ln x$, então $dt = \dfrac{dx}{x}$. Deste modo temos:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C. \quad \square$$

8) Ache $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x\,dx$.

Resolução. Fácilmente se vê que se fizermos $t = \sin x$, então $dt = \cos x\,dx$. Sendo assim, o integrando tem uma forma mais adequada para integração:

$$\int \sin^5 x \cos x\,dx = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C. \quad \square$$

9) Ache $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Resolução. Por definição $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Fazendo a substituição $t = \cos x$ vemos que $dt = -\sin x dx$. Deste modo

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C. \quad \square$$

10) Ache $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\, dx$.

Resolução. Façamos a substituição $t = \sin x - \cos x$. Então $dt = (\cos x + \sin x)dx$ e, deste modo, temos:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\, dx = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C. \quad \square$$

11) Ache $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos 2x}\, dx$.

Resolução. Sabemos que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Façamos a substituição $t = \sqrt{2}\cos x$, então $dt = -\sqrt{2}\sin x dx$. Deste modo temos:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx = \int \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos^2 x - 1}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|t + \sqrt{t^2 - 1}| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}| + C. \quad \square$$

12) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

Resolução. Começaremos por fazer algumas transformações ao integrando. Temos

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}.$$

Fazendo a substituição $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ vemos que $dt = \dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$. Assim,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square$$

13) Ache $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

Resolução. Vamos fazer a substituição $t = \operatorname{arctg} x$, então $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Deste modo temos:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C. \quad \square$$

14) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Resolução. Pegamos na expressão que se encontra no denominador e vamos completar o quadrado perfeito, isto é,

$$x^2+x-2 = x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Vamos fazer a substituição $t = x + \dfrac{1}{2}$. Então,

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dt}{t^2-(3/2)^2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(3/2)-t}{(3/2)+t}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1-x}{2+x}\right| + C. \quad \square$$

15) Ache $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)(x+3)}dx$.

Resolução. Vamos aplicar o método de decomposição e para tal escrevemos o integrando na forma de soma de duas fracções:

$$\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} =$$

$$= \frac{(A+B)x+3A+2B}{(x+2)(x+3)} \Longrightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ 3A+2B=0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $A=-2,\ B=3$. Assim,

$$\int \frac{x}{(x+2)(x+3)}\,dx = -2\int \frac{dx}{x+2} + 3\int \frac{dx}{x+3} + C =$$

$$= -\ln|x+2|^2 + \ln|x+3|^3 + C = \ln\frac{|(x+3)^3|}{(x+2)^2} + C. \quad \square$$

16) Ache $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$.

Resolução. O integrando podemos reescrever numa outra forma, precisamente

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}.$$

Assim,

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int d\sin 2x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C. \quad \square$$

17) Ache $\displaystyle\int \sin 3x \sin 5x\, dx$.

Resolução. Vamos escrever o integrando na forma de diferença de cosenos:

$$\sin 3x \sin 5x = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{2}.$$

Deste modo temos:

$$\int \sin 3x \sin 5x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int d\sin 2x - \frac{1}{16}\int d\sin 8x = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C. \quad \square$$

18) Ache $\displaystyle\int \sin^3 x\, dx$.

Resolução. Temos:

$$\sin^3 x\, dx = \sin^2 x \sin x\, dx = -\sin^2 x\, d\cos x = \cos^2 x\, d\cos x - d\cos x.$$

Deste modo,

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \cos^2 x\, d\cos x - \int d\cos x = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \quad \square$$

19) Ache $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

Resolução. Temos no numerador

$$\sin x \cos^3 x\, dx = \cos^2 x \sin x \cos x\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x\, d\cos^2 x.$$

Então, se fizermos $t = \cos^2 x$ temos:

$$\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 x\, d\cos^2 x}{1+\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt = -\frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\ln|1+t| + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln|1+\cos^2 x| + C. \quad \square$$

20) Ache $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

Resolução. Seja $u = \ln x$, $v = x$. Aplicando a fórmula de integração por partes, isto é,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

temos:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. \quad \square$$

21) Ache $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$.

Resolução. Façamos $u = x$, $e^{-x}dx = dv$, isto é, $v = -e^{-x}$. Assim,

$$\int xe^{-x}\,dx = -\int x\,de^{-x} = -\left(xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx\right) =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C. \quad \square$$

22) Ache $\displaystyle\int x\cos x\,dx$.

Resolução. Seja $u = x$, $v = \sin x$. Então,

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \quad \square$$

23) Ache $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

Resolução. Façamos $u = \arcsin x$, $v = x$. Então,

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\,d\arcsin x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\arcsin x + \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad \square$$

24) Ache $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$.

Resolução. Façamos algumas transformações no integrando:

$$x\sin^2 x\,dx = x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{x}{2}dx - \frac{x}{2}\cos 2x\,dx.$$

Assim,

$$\int x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\int x\,d\sin 2x =$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\left(x\sin 2x - \int \sin 2x\,dx\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C. \quad \square$$

25) Ache $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Resolução. Seja $I \equiv \displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$. Então

$$I = \frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x}\,d\sin\beta x = \frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \int \sin\beta x\,de^{\alpha x}\right) =$$
$$= \frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\right) = \frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\right) =$$
$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\,d\cos\beta x = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\alpha x}\cos\beta x - \int \cos\beta x\,de^{\alpha x}\right) =$$
$$\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\alpha x}\cos\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\cos\beta x\right) =$$
$$\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow I + \frac{\alpha^2}{\beta^2}I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} = \frac{\beta e^{\alpha x}\sin\beta x + \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow I = \frac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2+\alpha^2}. \quad \square$$

8.3 Perguntas de controle

1) Enuncie o teorema sobre mudança de variável no integral indefinido.

2) Escreva a fórmula de integração por partes.

8.4 Exercícios propostos

1) Ache $\displaystyle\int (2x-3)^{10}\,dx$.

2) Ache $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

3) Ache $\displaystyle\int \frac{x}{3-2x^2}\,dx$.

4) Ache $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx$.

5) Ache $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$.

6) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

7) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

8) Ache $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$.

9) Ache $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

10) Ache $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx$.

11) Ache $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$.

12) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

13) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

14) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+3x^2+2}$.

15) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

16) Ache $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$.

17) Ache $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx\,.$

18) Ache $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx\,.$

19) Ache $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx\,.$

20) Ache $\displaystyle\int x^n \ln x\,dx\,.$

21) Ache $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\,dx\,.$

22) Ache $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,dx\,.$

23) Ache $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx\,.$

24) Ache $\displaystyle\int x \sin\sqrt{x}\,dx\,.$

25) Ache $\displaystyle\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\,.$

Módulo 9

Integração de funções racionais, irracionais e trigonométricas

9.1 Resumo teórico

Vejamos a função racional $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, onde $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ são polinómios de grau n e m, respectivamente, em relação à variável x. Se $n \geq m$, então a função é imprópria e ela pode ser escrita na forma

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \tilde{P}_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

onde $\tilde{P}_{n-m}(x)$ é um polinómio de grau $n-m$ em relação à variável x, $k < m$.

Teorema 22. *Seja* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *uma função racional,* $n < m$, *onde*

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_k)^{\alpha_k} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_r x + c_r)^{\beta_r},$$

a_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ *são raízes reais,* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + 2(\beta_1 + \cdots + \beta_r) = m$, $b_j^2 - 4c_j < 0$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots,\ r)$.

Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ \frac{A_k^{(1)}}{x-a_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(x-a_k)^2} + \cdots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \\
&+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \cdots + \frac{B_1^{(\beta_1)}x + C_1^{(\beta_1)}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ \frac{B_r^{(1)}x + C_r^{(1)}}{x^2+b_rx+c_r} + \frac{B_r^{(2)}x + C_r^{(2)}}{(x^2+b_rx+c_r)^2} + \cdots + \frac{B_r^{(\beta_r)}x + C_r^{(\beta_r)}}{(x^2+b_rx+c_r)^{\beta_r}},
\end{aligned}
$$

onde $A_l^{(p)}$, $B_l^{(p)}$ *e* $C_l^{(p)}$ *são números reais.*

Cada uma destas fracções integra-se fácilmente:

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{B}{(x-a)^\alpha}\,dx = \frac{B}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C \quad (\alpha = 2, 3, \ldots);$

3) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+bx+c) + \frac{cN-Mb}{2\sqrt{c-(b/2)^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+(b/2)}{\sqrt{c-(b/2)^2}} + C;$

4) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+bx+c)^\alpha}\,dx = \frac{M}{2(1-\alpha)(t^2+a^2)^{\alpha-1}} + \left(N - \frac{Mb}{2}\right)K_\alpha \quad (\alpha = 2, 3, \ldots)$, onde

$$K_\alpha = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\alpha}, \quad t = x + \frac{b}{2}, \quad a^2 = c - \frac{b^2}{4}.$$

Seja $R(x, y)$ uma função racional de dois argumentos x e y. O integral do tipo

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$$

racionaliza-se, isto é, transforma-se num integral de função racional, se fizermos a substituição

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

O integral do tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0,$$

resolve-se com ajuda das substituições de Euler, que racionalizam integrandos deste tipo. Se $b^2 - 4ac < 0\,,\ a > 0$, então aplicamos a primeira substituição de Euler:

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}.$$

Se $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são valores reais, então aplicamos a segunda substituição de Euler:

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1}.$$

O integral do tipo

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

racionaliza-se com ajuda da substituição trigonométrica universal $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. Em casos particulares usam-se outras substituições trigonométricas a saber:

1) se $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, fazemos a substituição $t = \cos x$;

2) se $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, fazemos a substituição $t = \sin x$;

3) se $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, fazemos a substituição $t = \operatorname{tg} x$.

9.2 Exercícios resolvidos

1) Usando o método de coeficientes indeterminados, ache:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\, dx$;

Resolução. Vamos decompôr o integrando em fracções simples, isto é,

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{(A+B)x + (5A - 2B)}{(x-2)(x+5)}.$$

Temos duas fracções com o mesmo denominador e, como elas são iguais, significa que os numeradores são iguais. Assim, temos a igualdade

$$2x + 3 = (A + B)x + (5A - 2B).$$

Dois polinómios são iguais se os coeficientes ligados às partes literais do mesmo grau coincidem. Portanto,

$$A + B = 2, \quad 5A - 2B = 3 \Longrightarrow A = B = 1.$$

Voltando ao nosso integral podemos escrevê-lo na forma

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+5}.$$

Cada um dos integrais à direita calcula-se directamente usando a fórmula vista no resumo teórico, isto é,

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2|, \quad \int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5|.$$

Em conclusão temos:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \ln|x-2| + \ln|x+5| + C. \quad \square$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$;

Resolução. O integrando não é uma fracção própria, pois o grau do numerador é igual ao grau do denominador. Podemos somar e subtrair no numerador a expressão $5x^2+4$. Ao fazermos isto procuramos expressar a nossa fracção como soma da parte inteira mais a parte própria, isto é,

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = \frac{x^4+5x^2+4-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = \frac{x^4+5x^2+4}{x^4+5x^2+4} - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int dx - \int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$$

Agora vamos achar o último integral à direita, começando por factorizar a expressão x^4+5x^2+4 que se encontra no denominador, isto é,

$$x^4+5x^2+4 = (x^2+4)(x^2+1).$$

A fracção que constitui o integrando vamos escrevê-la na forma de soma de fracções simples:

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{5x^2+4}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{(A+B)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D}{(x^2+4)(x^2+1)}.$$

Temos duas fracções com o mesmo denominador e como elas são iguais significa que os numeradores são iguais. Assim, temos a igualdade

$$5x^2+4=(A+B)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D.$$

Dois polinómios são iguais se os coeficientes ligados às partes literais do mesmo grau coincidirem. Portanto,

$$A+B=0, \quad B+D=5, \quad A+4C=0, \quad B+4D=4 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A=C=0, \quad B=\frac{16}{3}, \quad D=-\frac{1}{3}.$$

Assim,

$$\int \frac{5x^2+4}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx=\frac{16}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{8}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,x.$$

Em conclusão temos:

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx=\int dx-\int\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx=x-\frac{8}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,x+C. \quad \square$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx;$

Resolução. Vamos decompôr o integrando em fracções simples e, para tal, começamos por factorizar o denominador. Fácilmente se constata que $x=1$ anula o denominador. Aplicando a regra de Ruffini[1], sobre a divisão de um polinómio por um binómio do tipo $x-a$, temos $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. Assim,

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}=$$
$$=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Temos uma igualdade de duas fracções com o mesmo denominador, significa que os numeradores também deverão ser iguais. Portanto,

$$x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2.$$

Vamos achar os coeficientes A, B e C da seguinte maneira: colocamos o valor $x=1$ na nossa igualdade e temos

$$1=3B\Longrightarrow B=\frac{1}{3};$$

[1] Paolo Ruffini (1765–1822) — matemático italiano

colocamos o valor $x = -2$ na nossa igualdade e temos

$$-2 = 9C \Longrightarrow C = -\frac{2}{9};$$

finalmente, colocando, por exemplo, $x = 0$ na nossa igualdade temos

$$0 = -2A + 2B + C = -2A + \frac{4}{9} \Longrightarrow A = \frac{2}{9}.$$

Voltando ao integral inicial temos

$$\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2}\, dx = \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x - 1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x + 2} =$$

$$= \frac{2}{9} \ln |x - 1| - \frac{1}{3(x - 1)} - \frac{2}{9} \ln |x + 2| + C = -\frac{1}{3(x - 1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| + C. \quad \square$$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1};$

Resolução. Pegamos o integrando e factorizamos o denominador, isto é,

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4(x - 1) + x^2(x - 1) + (x - 1) =$$

$$= (x - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Assim,

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 - x + 1} =$$

$$= \frac{P_4(x)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)},$$

onde

$$\begin{aligned} P_4(x) \; &= (A + B + D)x^4 - (2B - C - E)x^3 + \\ &+ (A + 2B - 2C)x^2 - (B - 2C + D)x + A - C - E. \end{aligned}$$

Igualando os numeradores obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B + D = 0, \\ -2B + C + E = 0, \\ A + 2B - 2C = 0, \\ -B + 2C - D = 0, \\ A - C - E = 1. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema encontramos

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{2}.$$

Deste modo,

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{[x-(1/2)]^2 + (\sqrt{3}/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + C. \quad \square$$

2) Ache a fórmula recorrencial do integral $K_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha}$ $\quad (\alpha = 1,\ 2, \ldots)$.

Resolução. Seja $u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}$, $dv = dx$. Então,

$$K_\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} - \int x\, d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\right] = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha \int \frac{(x^2+a^2) - a^2}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}}\right] =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha[K_\alpha - a^2 K_{\alpha+1}],$$

donde obtemos a fórmula recorrente

$$K_{\alpha+1} = \frac{x}{2\alpha a^2 (x^2+a^2)^\alpha} + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha a^2} K_\alpha. \quad \square$$

3) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Resolução. Façamos a substituição $t^2 = x \Longrightarrow 2t\,dt = dx$. Assim,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C. \quad \square$$

4) Ache $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

Resolução. Façamos a substituição

$$t^6 = x+1 \Longrightarrow 6t^5dt = dx.$$

Assim,

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = 6\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}\,dt.$$

O integrando no último integral é uma fracção imprópria. Vamos reescrevê-la como a soma da parte inteira mais a parte própria:

$$\frac{t^5-t^8}{1+t^2} = -t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1}.$$

Deste modo,

$$6\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}\,dt = 6\left(-\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)+3\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}-6\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\frac{6t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+\frac{3t^4}{2}-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctg} t+C,$$

onde $t^6 = x+1$. $\square$

5) Ache $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

Resolução. Façamos a substituição

$$t^3 = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = -3\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Neste último integral pegamos o integrando e vamos decompô-lo em fracções mais simples:

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1} = \frac{(A+B)t^2+(A-B+C)t+A-C}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Igualando os numeradores temos o sistema

$$A+B=0, \quad A-B+C=0, \quad A-C=1,$$

cuja solução é
$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$
Deste modo temos:
$$\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}(2t+1)}{3}.$$
Em conclusão,
$$\int \frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = -3\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$
$$= \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) - \sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}(2t+1)}{3} + C. \quad \square$$

6) Ache $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$.

Resolução. Pegamos o integrando e evidenciamos a expressão $\sqrt{x-1}$, que se encontra no numerador e denominador, após o qual introduzimos a variável $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$:
$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{t-1}{t+1}.$$
Já que $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ então, $x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$ e, portanto, $dx = -\dfrac{4tdt}{(t^2-1)^2}$. Assim,
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx = -4\int \frac{t}{(t+1)^3(t-1)}\,dt.$$
Vamos decompor a expressão $\dfrac{t}{(t+1)^3(t-1)}$ em fracções simples:
$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{(t+1)^3} =$$
$$= \frac{A(t+1)^3 + B(t-1)(t+1)^2 + C(t-1)(t+1) + D(t-1)}{(t-1)(t+1)^3}.$$
Igualando os numeradores
$$t = A(t+1)^3 + B(t-1)(t+1)^2 + C(t-1)(t+1) + D(t-1)$$

e colocando $t = -1$, $t = 1$ achamos $D = \dfrac{1}{2}$ e $A = \dfrac{1}{8}$. Agora falta achar B e C e para tal colocamos na igualdade, por exemplo, $t = 0$ e $t = 2$ obtendo deste modo o sistema

$$B + C = -\frac{3}{8}, \quad 3B + C = -\frac{5}{8}.$$

Resolvendo este sistema achamos $B = -\dfrac{1}{8}$ e $C = -\dfrac{1}{4}$. Em conclusão

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,dx = -4 \int \frac{t}{(t+1)^3(t-1)}\,dt =$$

$$= -4\left[\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^3}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C. \quad \square$$

7) Usando a substituição de Euler mais adequada, ache $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}$.

Resolução. A expressão $x^2 + x + 1 > 0$, portanto vamos aplicar a primeira substituição de Euler:

$$t = \sqrt{x^2+x+1} + x \Longrightarrow x = \frac{t^2-1}{1+2t} \Longrightarrow dx = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt.$$

Deste modo,

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,dt.$$

Decompondo o último integrando em fracções simples temos:

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} = \frac{A(1+2t)^2 + Bt(1+2t) + Ct}{t(1+2t)^2}.$$

Para acharmos os coeficientes A, B e C resolvemos o sistema

$$2B + 4A = 2, \quad 4A + B + C = 2, \quad A = 2$$

e encontramos $A = 2$, $B = C = -3$. Em conclusão

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{1+2t} - 3\int \frac{dt}{(1+2t)^2} = \frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3} + C,$$

onde $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$. $\square$

8) Usando a substituição de Euler mais adequada, ache $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.

Resolução. Temos $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, por isso aplicamos a segunda substituição de Euler:

$$t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} \Longrightarrow x=\frac{2-t^2}{t^2-1} \Longrightarrow dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt.$$

Assim,

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx=\int \frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\,dt.$$

Pegamos no último integrando e vamos decompô-lo em fracções simples:

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{(t+1)^3}.$$

Achamos os valores de A, B, C, D e E: $A=-\dfrac{16}{27}$, $B=\dfrac{3}{4}$, $C=-\dfrac{17}{108}$, $D=\dfrac{5}{18}$ e $E=\dfrac{1}{3}$. Em conclusão,

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx=-\frac{16}{27}\ln|t-3|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{1}{6(t+1)^2}+C. \quad \square$$

9) Ache $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$.

Resolução. Seja $R(\sin x,\cos x)=\cos^5 x$. Vemos, que $R(\sin x,-\cos x)=(-\cos x)^5=-\cos^5 x=-R(\sin x,\cos x)$, portanto faremos a substituição $t=\sin x$. Assim,

$$\int \cos^5 x\,dx=\int \cos^4 x\,d\sin x=\int (1-\sin^2 x)^2\,d\sin x=$$

$$=\int (1-t^2)^2\,dt=t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C,$$

onde $t=\sin x$. $\square$

10) Ache $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\,dx$.

Resolução. Vamos transformar o integrando na soma de senos:

$$\sin 5x\cos x=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 6x).$$

Então,

$$\int \sin 5x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 6x) \, dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C. \quad \square$$

11) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$.

Resolução. Vamos aplicar a substituição universal $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. Então, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Assim,

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dt}{t} = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x+\phi}{2} \right| + C,$$

onde $\operatorname{tg} \phi = \dfrac{a}{b}$. $\square$

9.3 Perguntas de controle

1) O que significa extrair a parte inteira duma fracção imprópria?

2) O que entende por método de coeficientes indeterminados na decomposição em soma de fracções simples?

3) Que tipo de integrais se calcula com ajuda das substituições de Euler?

9.4 Exercícios propostos

1) Usando o método de coeficientes indeterminados, ache os integrais:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \, dx$;

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} \, dx$;

   (c) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} \, dx$;

   (d) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} \, dx$.

2) Ache $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

3) Ache $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$.

4) Ache $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

5) Ache $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$.

6) Usando a substituição de Euler mais adequada, ache $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

7) Usando a substituição de Euler mais adequada, ache $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

Módulo 10

Integral definido segundo Riemann

10.1 Resumo teórico

Diremos que $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_n$ formam uma **partição** do segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ se $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. A denotação usada é: $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$.

Façamos as denotações:

$$\Delta x_k \overset{\text{def}}{=} x_k - x_{k-1}, \quad d \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k.$$

Seja $f(x)$ uma função definida no segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ e τ é uma partição qualquer deste segmento. A expressão

$$\sigma(x_k, \zeta_k, f) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k, \quad x_{k-1} \le \zeta_k \le x_k$$

chama-se **soma integral de Riemann**[1] para a função $f(x)$.

Ao limite da soma integral, caso exista, quando $d \to 0$ chama-se **integral definido** de $f(x)$ no segmento $[a, b]$. A denotação usada é : $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{d \to 0} \sigma(x_k, \zeta_k, f)$.

Sejam

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x), \quad 1 \le k \le n.$$

As expressões

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

chamam-se **soma superior** e **soma inferior de Darboux**[2], respectivamente.

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) — matemático alemão

[2] Gaston Darboux (1842–1917) — matemático francês

Teorema 23. *Qualquer que seja a partição τ do segmento $[a,b]$, tem lugar a dupla desigualdade*

$$s \le \sigma \le S.$$

Teorema 24. *Se $f(x)$ é integrável segundo Riemann em $[a,b]$, então*

$$\lim_{d\to 0}(S-s)=0.$$

Teorema 25. *Se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$, então ela é integrável segundo Riemann neste segmento.*

Teorema 26. *Se $f(x)$ é monótona em $[a,b]$, então ela é integrável segundo Riemann.*

10.2 Exercícios resolvidos

1) Ache a soma integral para a função $f(x)=1+x$ no segmento $[-1,4]$, dividindo-o em n partes iguais e escolhendo

$$\zeta_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}, \quad 1\le k\le n.$$

Resolução. Dividindo $[-1,4]$ em n partes iguais obtem-se

$$-1=x_0<x_1<\cdots<x_n=4,$$

onde $x_k=-1+kh$, $h=\dfrac{5}{n}$. Já que

$$\zeta_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2},$$

então $\zeta_k=-1+\left(k-\dfrac{1}{2}\right)h$. Compondo a soma integral tem-se

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)h^2=$$

$$=h^2\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)=h^2\left(-\frac{1}{2}n+\sum_{k=1}^{n}k\right)=$$

$$=h^2\left[-\frac{1}{2}n+\frac{(n+1)n}{2}\right]=h^2\cdot\frac{n^2}{2}=\frac{25n^2}{2n^2}=12.5. \quad \square$$

2) Com base na definição de integral definido como o limite da soma integral, calcule:

(a) $\int_0^1 x\,dx$;

Resolução. Dividindo o comprimento do segmento $[0,1]$ em n partes iguais temos $h = \frac{1}{n}$. Deste modo, a partição τ de $[0,1]$ será composta por pontos do tipo $x_k = kh$ $(k = 0,\ 1, \ldots,\ n)$. Vamos escolher

$$\zeta_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = \left(k - \frac{1}{2}\right) h, \quad 1 \le k \le n.$$

Então,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{2}\right) h^2 = h^2 \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \sigma = \int\limits_0^1 x\,dx. \quad \square$$

(b) $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx$;

Resolução. Dividindo o comprimento do segmento $[-1,2]$ em n partes iguais obtem-se $h = \frac{3}{n}$. Escolhemos $\zeta_k = x_k$, onde $x_k = -1 + kh$ $(k = 1, \ldots, n)$. Então,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} (-1 + kh)^2 h = \sum_{k=1}^{n} (k^2h^2 - 2kh + 1)h = h\left(h^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2h \sum_{k=1}^{n} k + n\right) =$$

$$= h\left[h^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2h\frac{n(n+1)}{2} + n\right] = \frac{6n^2 + 9n + 9}{2n^2}.$$

Assim,

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + 9n + 9}{2n^2} = 3.$$

Neste exercício aplicamos as igualdades

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \square$$

(c) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b);$

Resolução. Dividindo o comprimento do segmento $[a, b]$ em n partes iguais obtemos $h = \dfrac{b-a}{n}$. Então, $x_k = a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Vamos escolher $\zeta_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$ e calculamos

$$f(\zeta_k) = \frac{1}{\zeta_k^2} = \frac{1}{x_{k-1}x_k} = \frac{1}{[a + (k-1)h](a + kh)} = \frac{1}{h[a + (k-1)h]} - \frac{1}{h(a + kh)}.$$

Compomos a soma integral

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{a + (k-1)h} - \frac{1}{a + kh} \right] = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Deste modo

$$\lim_{n\to\infty} \sigma = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \int_a^b \frac{dx}{x^2}. \quad \square$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 a^x\,dx, \quad a > 0;$

Resolução. Dividindo o comprimento de $[0, 1]$ em n partes iguais temos $h = \dfrac{1}{n}$, portanto $x_k = kh$. Escolhemos $\zeta_k = x_{k-1}$. Então,

$$f(\zeta_k) = a^{(k-1)h}.$$

Compomos a soma integral

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} a^{(k-1)h} h = h\left[1 + a^h + \cdots + a^{(n-1)h}\right] = \frac{h(1-a)}{1 - a^h}$$

e, passando para o limite quando $h \to 0$ temos

$$\lim_{h\to 0} \sigma = (1-a) \lim_{h\to 0} \frac{h}{1 - a^h} = \frac{a-1}{\ln a}. \quad \square$$

3) Mostre que a função de Dirichlet[3]

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}, \quad x \in [a, b],$$

[3]Johann Peter Gustav Lejeunne Dirichlet (1805–1859) — matemático alemão

não é integrável segundo Riemann.

Resolução. Vamos compôr duas somas integrais, para uma escolhemos ζ_k racional e para outra $\tilde{\zeta}_k$ irracional:

$$\sigma = D(\zeta_1)\Delta x_1 + \cdots + D(\zeta_n)\Delta x_n = b - a,$$

$$\tilde{\sigma} = D(\tilde{\zeta}_1)\Delta x_1 + \cdots + D(\tilde{\zeta}_n)\Delta x_n = 0.$$

Temos

$$\lim_{d \to 0} \sigma = b - a \neq \lim_{d \to 0} \tilde{\sigma} = 0!!$$

Isto mostra que a função de Dirichlet não é integrável segundo Riemann, pois caso fosse os limites das somas integrais, quaisquer que elas sejam, deveriam coincidir.

4) Sabendo que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),$$

calcule $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Resolução. Façamos algumas transformações para S_n, isto é,

$$S_n = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Tomando $\zeta_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ temos

$$S_n = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\frac{b-a}{n} \to \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx, \quad n \to \infty. \quad \square$$

10.3 Perguntas de controle

1) Defina partição dum segmento.

2) O que é soma integral de $f(x)$ em $[a, b]$?

3) O que é integral definido?

4) O que significa dizer que $f(x)$ é integrável segundo Riemann em $[a, b]$?

5) É correcto dizer que qualquer função limitada é integrável?

6) O que entende por soma superior (S) e soma inferior (s) de Darboux?

7) Enuncie as propriedades das somas de Darboux.

8) Formule as condições necessárias e suficientes de integração.

9) Seja $f(x)$ uma função monótona em $[a, b]$, que possui um número infinito de pontos de descontinuidade. Esta função é integrável em $[a, b]$?

10.4 Exercícios propostos

1) Aplicando a definição mostre, que $f(x) = c$ é integrável em $[a, b]$.

2) Aplicando a definição calcule

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

3) Aplicando a definição calcule

$$\int_0^{x} \cos t \, dt.$$

4) Aplicando a definição calcule

$$\int_a^b x^m \, dx \quad (0 < a < b, \ m \neq -1).$$

Indicação: escolha os pontos de partição de tal modo, que as suas abscissas x_k formem uma progressão geométrica.

5) Seja $f(x)$ uma função monótona e limitada em $[0, 1]$. Demonstre que

$$\int_0^1 f(x) \, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Mostre que a função descontínua

$$f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

é integrável em $[0, 1]$.

7) Mostre que a função de Riemann

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \quad \text{é irracional} \\ \\ \dfrac{1}{n} & \text{se} \quad x = \dfrac{m}{n}, \end{cases}$$

onde m e n $(n \geq 1)$ são números primos, é integrável em qualquer intervalo finito.

8) Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a, b]$ e

$$f_n(x) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x),$$

onde $x_k = a + k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots)$ Demonstre que

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

9) Demonstre que se a função limitada $f(x)$ é integrável em $[a, b]$, então $|f(x)|$ também é integrável em $[a, b]$ e tem lugar a seguinte desigualdade

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

10) Seja $f(x)$ uma função integrável em $[A, B]$. Demonstre que a função $f(x)$ é integrávelmente contínua, isto é,

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0,$$

onde $[a, b] \subset [A, B]$.

Módulo 11

Fórmula de Newton-Leibniz

11.1 Resumo teórico

Teorema 27. *Seja $f(x)$ uma função seccionávelmente contínua em $[a,b]$. Então ela tem primitiva neste segmento e uma das suas primitivas é*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Teorema 28. *Seja $f(x)$ uma função seccionávelmente contínua em $[a,b]$. Então tem lugar a fórmula de Newton*[1]*- Leibniz:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$.

Teorema 29. *O integral definido usufrui as seguintes propriedades:*

1) $\displaystyle\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0\,;$

2) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx\,;$

[1] Isaac Newton (1643–1727) — físico, astrónomo e matemático inglês

3) $\displaystyle\int\limits_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^1;$

4) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b.$

Teorema 30. *Suponhamos que*

1) $f(x)$ *é definida e contínua em* $[a,b]$*;*

2) $\phi(t) \in C^1_{[\alpha,\beta]}$*,* $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b,\ a \le \phi(t) \le b.$

Então

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt.$$

Teorema 31. *Suponhamos que* $u(x),\ v(x) \in C^1_{[a,b]}$*. Então*

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b v(x)du(x).$$

11.2 Exercícios resolvidos

1) Utilizando a fórmula de Newton-Leibniz, calcule:

(a) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3\,dx;$

Resolução. A primitiva de $f(x) = x^3$ é $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$. Assim,

$$\int\limits_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}. \quad \square$$

(b) $\displaystyle\int\limits_0^\pi \sin x\,dx;$

Resolução. A primitiva de $f(x) = \sin x$ é $F(x) = -\cos x$. Aplicando a fórmula de Newton-Leibniz obtemos

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2. \quad \square$$

(c) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

Resolução. A primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é $F(x) = \operatorname{arctg} x$. Deste modo

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}. \quad \square$$

(d) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{se} \quad 1 < x \le 2; \end{cases}$

Resolução. Como podemos ver, a função $f(x)$ tem comportamento quadrático em $[0,1]$ e comportamento linear em $(1,2]$. No cálculo do integral usaremos a propriedade de aditividade que, para este caso, é

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 (2-x)\, dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2 = \frac{5}{6}. \quad \square$$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}, \quad 0 < \alpha < \pi$;

Resolução. Pegamos o integrando e vamos fazer algumas transformações:

$$x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = x^2 - 2x\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = (x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha.$$

Fazendo $x - \cos\alpha = t$ então, já que x varia de -1 à 1, t variará de $-1-\cos\alpha$ à $1 - \cos\alpha$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha} \frac{dt}{t^2 + \sin^2\alpha}.$$

A primitiva de $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + \sin^2\alpha}$ é

$$F(t) = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \text{arctg}\frac{t}{\sin\alpha}$$

daí, que

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\text{arctg}\,\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \text{arctg}\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \left[\text{arctg}\,\left(\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right) + \text{arctg}\,\left(\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}. \quad \square$$

2) Usando a fórmula de integração por partes, calcule:

(a) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx;$

Resolução. Como $e^{-x}dx = -de^{-x}$ então

$$\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx = -\int\limits_0^{\ln 2} x\,de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx = (-\ln 2)e^{-\ln 2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + 1) = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}. \quad \square$$

(b) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx;$

Resolução. Temos $\sin x dx = -d\cos x$. Assim,

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = -\int\limits_0^{\pi} x\,d\cos x = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi. \quad \square$$

(c) $\displaystyle\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx;$

Resolução. Por definição

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -\ln x & \text{se} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Então

$$\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = \int\limits_{1/e}^{1} (-\ln x)\,dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx = -x\ln x\Big|_{1/e}^{1} + \int\limits_{1/e}^{1} dx + x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int\limits_{1}^{e} dx =$$

$$= \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + e\ln e - (e-1) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right). \quad \square$$

(d) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \cos x\,dx$;

Resolução. Neste exercício, com o intuito de fazer desaparecer o factor x^2 que se encontra no integrando, aplicamos duas vezes a integração por partes. Como $\cos x dx = d\sin x$, então

$$\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \cos x\,dx = \int\limits_{0}^{2\pi} x^2\,d\sin x = x^2 \sin x\Big|_{0}^{2\pi} - 2\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin x\,dx =$$

$$= -2\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin x\,dx = 2\int\limits_{0}^{2\pi} x\,d\cos x = 2\left(x\cos x\Big|_{0}^{2\pi} - \int\limits_{0}^{2\pi} \cos x\,dx\right) =$$

$$= 2\left(2\pi - \sin x\Big|_{0}^{2\pi}\right) = 4\pi. \quad \square$$

3) Fazendo a mudança de variável mais adequada, calcule:

(a) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx$;

Resolução. Seja $t = 5 - 4x$, então $dt = -4dx$. Quando $x = -1$ a variável $t = 9$ e quando $x = 1$, $t = 1$. Assim,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,dx = -\int\limits_{9}^{1} \frac{(5-t)}{16\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{16}\int\limits_{1}^{9} \left(\frac{5}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(-\frac{2}{3}t\sqrt{t} + 10\sqrt{t}\Big|_{1}^{9}\right) = \frac{1}{6}. \quad \square$$

(b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$;

Resolução. Seja $x = a\sin t$, então $dx = a\cos t dt$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a\cos t.$$

Quando $x = 0$ temos $t = 0$ e quando $x = a$ temos $t = \dfrac{\pi}{2}$. Deste modo

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^4\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2}\cos 4t\,dt\right) = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi a^4}{16}. \quad \square$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x - 1}\,dx$;

Resolução. Fazemos $e^x - 1 = t^2$, então $e^x dx = 2t dt$. Assim, $dx = \dfrac{2t}{1+t^2}dt$. Quando $x = 0$ temos $t = 0$ e quando $x = \ln 2$ temos $t = 1$. Deste modo

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\left(\int_0^1 dt - \int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= 2\left(t - \operatorname{arctg} t\big|_0^1\right) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$;

Resolução. Façamos $t = \arcsin\sqrt{x}$, então $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$. Quando $x = 0$ temos $t = 0$ e quando $x = 1$ temos $t = \dfrac{\pi}{2}$. Deste modo

$$2\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{2x\sqrt{x(1-x)}}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} t\,dt = \frac{\pi^2}{4}. \quad \square$$

4) Demonstre que se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x) = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\,dx;$$

Resolução. Façamos $t = \dfrac{x-a}{b-a}$, então $dt = \dfrac{dx}{b-a}$ e quando x varia de a à b temos t variando de 0 até 1. Vê-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f[a+(b-a)t](b-a)\,dt = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]\,dt. \quad \square$$

5) Demonstre a igualdade

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,dx \quad (a>0);$$

Resolução. Façamos $t = x^2$, então $2xdx = dt$ e, portanto, $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. Quando x varia de 0 à a temos t variando de 0 até a^2. Assim,

$$\int_0^a x^3 f(x^3)\,dx = \int_0^{a^2} \frac{t\sqrt{t}f(t)}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\,dt. \quad \square$$

6) Demonstre que se $f(x)$ é contínua em $[0,1]$, então

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx;$$

Resolução. Seja $\sin t = \cos x$, então $x = \arcsin(\cos t)$ e

$$dx = -\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}dt = -dt.$$

Quando x varia de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$ vemos que t varia de $\dfrac{\pi}{2}$ até 0. Deste modo

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} f(\cos t)\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\,dt. \quad \square$$

7) Mostre que se $f(x)$ é par e contínua em $[-1,1]$, tem lugar a igualdade

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx;$$

Resolução. Aplicando a propriedade de aditividade do integral definido temos

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx;$$

para demonstrarmos a igualdade acima pretendida basta mostrar que

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

Fazendo $x=-t$ temos $dx=-dt$ e quando x varia de -1 até 0, t varia de 1 até 0. Assim,

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_{1}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{1} f(-t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t)\,dt,$$

pois $f(x)$ é par. $\square$

8) No integral

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

faça a mudança $\sin x = t$;

Resolução. Vamos partir o intervalo de integração $[0,2\pi]$ em quatro sub-intervalos: $[0,\pi/2]$, $[\pi/2,\pi]$, $[\pi,3\pi/2]$ e $[3\pi/2,2\pi]$. Sabemos que a função $\sin x$ é monótona em cada um destes intervalos. Assim,

$$\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_{0}^{1} f(\arcsin t)\,dt + \int_{1}^{0} f(\pi-\arcsin t)\,dt +$$

$$+\int_{0}^{-1} f(\pi-\arcsin t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(2\pi+\arcsin t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\, dt + \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\, dt. \quad \square$$

9) Calcule $\displaystyle\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\, dx$;

Resolução. Seja $2 - x^2 = t$, então $dt = -2xdx$ e quando x varia de 0 à 1 temos que t varia de 2 até 1. Deste modo

$$\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\, dx = -\frac{1}{2}\int_2^1 t^{12}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{12}\, dt = \frac{1}{26}\left(2^{13} - 1\right). \quad \square$$

10) Calcule $\displaystyle\int_1^e (x \ln x)^2\, dx$;

Resolução. Aplicando o método de integração por partes duas vezes temos:

$$\int_1^e x^2 \ln^2 x\, dx = \frac{1}{3}\int_1^e \ln^2 x\, dx^3 = \frac{1}{3}\left(e^3 - \frac{2}{3}\int_1^e \ln x\, dx^3\right) =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9}\int_1^e x^2\, dx = \frac{5e^3}{27} - \frac{2}{27}. \quad \square$$

11) Deduza a fórmula recorrencial e calcule

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx;$$

Resolução. Sabemos que

$$f(x)dx = \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x\, d\cos x.$$

Deste modo, integrando por partes temos:

$$I_n = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, d\cos x = -\left(\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx\right) =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Longrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Vejamos agora dois casos: $n = 2k$ e $n = 2k+1$, $k = 1, 2, \ldots$. Para o caso $n = 2k$ temos:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Para o caso $n = 2k+1$ temos:

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Assim,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{se} \quad n = 2k \\[2ex] \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!} & \text{se} \quad n = 2k+1. \end{cases} \qquad \square$$

11.3 Perguntas de controle

1) Defina primitiva de uma função.

2) Para que condições é correcta a fórmula de Newton-Leibniz?

3) Enuncie o teorema sobre mudança de variável no integral definido.

4) Enuncie o teorema sobre integração por partes para o integral definido.

5) Enuncie as propriedades do integral definido.

11.4 Exercícios propostos

1) Aplicando a fórmula de Newton-Leibniz calcule:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(c) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ (a, b \neq 0)$.

2) Explique porquê que a aplicação formal da fórmula de Newton-Leibniz não é correcta, se:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$;

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x}\,dx$.

3) Demonstre que

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt \approx \frac{e^{x^2}}{2x}, \quad x \to \infty.$$

4) Seja $f(x)$ uma função contínua e positiva. Demonstre que a função

$$\phi(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}$$

é crescente para $x > 0$.

5) Calcule

$$\int_0^1 f(x)\,dx,$$

se

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x \le t \\[2ex] \dfrac{t(1-x)}{1-t} & \text{se} \quad t \le x \le 1. \end{cases}$$

6) Utilizando a fórmula de integração por partes calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx\,.$

7) Demonstre que se $f(x)$ é contínua em $[0,1]$, então

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

8) Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\,dx\,;$

(b) $\displaystyle\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx\,;$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,;$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,;$

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (x\sin x)^2\,dx\,;$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx\,.$

9) Calcule os integrais:

(a) $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx\,;$

(b) $\displaystyle I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx\,;$

(c) $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$

10) Demonstre que se $f(x)$ é ímpar no intervalo $[-m, m]$, então

$$\int\limits_{-m}^{m} f(x)\,dx = 0.$$

Módulo 12

Teoremas de valor médio

12.1 Resumo teórico

Seja $f(x)$ uma função limitada em $[a,b]$. Chamaremos **valor médio** da função $f(x)$ em $[a,b]$, ao número

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

onde $m \leq \mu \leq M$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Se $f(x)$ fôr contínua, então existe um $\zeta \in [a,b]$ tal, que

$$f(\zeta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 32. *Seja $f(x)$ uma função limitada em $[a,b]$ e suponhamos que $g(x)$ é uma função integrável e que conserva o seu sinal em $[a,b]$. Então, existe um $\zeta \in [m,M]$ tal, que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \zeta\int_a^b g(x)\,dx,$$

onde $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Teorema 33. *Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ e suponhamos que $g(x)$ é uma função integrável e que conserva o seu sinal em $[a,b]$. Então, existe $c \in [a,b]$ tal, que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

12.2 Exercícios resolvidos

1) Ache os valores médios para:

   (a) $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2]$;

   Resolução. Por definição temos:

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}. \quad \square$$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 100]$;

   Resolução. Por definição temos:

$$\mu = \frac{1}{100}\int_0^{100}\sqrt{x} = \frac{20}{3}. \quad \square$$

   (c) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$;

   Resolução. Por definição temos:

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(10 + 2\sin x + 3\cos x)\,dx = 10. \quad \square$$

2) Ache o valor médio da velocidade dum corpo em queda livre, cuja velocidade inicial é v_0;

   Resolução. A velocidade dum corpo em queda livre é dada pela fórmula

$$v(t) = v_0 + gt.$$

   Suponhamos que T é o tempo que o corpo demora a cair. Então,

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T (v_0+gt)\,dt = \frac{1}{T}\left(v_0T + \frac{1}{2}gT^2\right) = v_0+\frac{1}{2}gT = \left(\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}gT\right) = \frac{1}{2}(v_0+v_1),$$

   onde $v_1 = v_0 + gT$ é a velocidade final do corpo, isto é, a velocidade do corpo quando choca com a terra. $\square$

3) Utilizando o teorema de valor médio, avalie os integrais:

(a) $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+0.5\cos x}$;

Resolução. Vamos avaliar o integrando $f(x) = \dfrac{1}{1+0.5\cos x}$. Temos

$$-1 \le \cos x \le 1, \ \forall\ x \ \in \ [0, 2\pi];$$

multiplicando esta dupla desigualdade por 0.5 e somando 1

$$-0.5 + 1 \le 1 + 0.5\cos x \le 0.5 + 1,$$

isto é,

$$\frac{2}{3} \le \frac{1}{1+0.5\cos x} \le 2.$$

Integrando a dupla desigualdade de 0 à 2π obtemos $\dfrac{4\pi}{3} \le I \le 4\pi$. $\square$

(b) $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$;

Resolução. Como

$$0 \le x \le 1 \Longrightarrow 1 \le 1 + x \le 2 \Longrightarrow 1 \le \sqrt{1+x} \le \sqrt{2},$$

portanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1.$$

Como a função x^9 conserva o sinal no segmento $[0, 1]$, multiplicamos esta última dupla desigualdade por x^9 e temos

$$\frac{x^9}{\sqrt{2}} \le \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \le x^9.$$

Integrando esta desigualdade, quando x varia de 0 à 1, obtemos

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \le I \le \frac{1}{10}. \quad \square$$

(c) $I = \int\limits_0^{100} \dfrac{e^{-x}}{x+100}\,dx$;

Resolução. A função e^{-x} é decrescente, portanto

$$e^{-100} \le e^{-x} \le 1, \quad x \in [0, 100].$$

Então,

$$\frac{e^{-100}}{100+x} \leq \frac{e^{-x}}{100+x} \leq \frac{1}{100+x} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{-100} \ln(100+x)\Big|_0^{100} \leq I \leq \ln(100+x)\Big|_0^{100},$$

isto é, $e^{-100}\ln 2 \leq I \leq \ln 2$. $\square$

4) Demonstre a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = 0;$$

Resolução. Começamos por avaliar o integrando:

$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq 1+x \leq 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1.$$

Multiplicando esta dupla desigualdade por x^n, pois x^n conserva o sinal em $[0,1]$, e integrando de 0 à 1 temos:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

Como $\dfrac{1}{2(n+1)} \to 0$ e $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ então, pelo teorema sobre sucessões intercaladas, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = 0. \quad \square$$

5) Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ duas funções integráveis em $[a,b]$, juntamente com os seus quadrados. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Bunikowskiĭ[1]:

$$\left[\int_a^b \phi(x)\psi(x)\, dx\right]^2 \leq \int_a^b \phi^2(x)\, dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)\, dx;$$

Resolução. Seja

$$0 \leq \theta(\lambda) = \int_a^b [\phi(x) + \lambda\psi(x)]^2\, dx =$$

[1]V. Ia. Bunikowskiĭ (1804–1889) — matemático russo

$$= \int_a^b [\phi^2(x)\,dx + 2\lambda\phi(x)\psi(x) + \lambda^2\psi^2(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b \phi^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx + \lambda^2 \int_a^b \psi^2(x)\,dx.$$

Façamos as notações:

$$A \equiv \int_a^b \psi^2(x)\,dx, \quad B \equiv 2\int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx, \quad C \equiv \int_a^b \phi^2(x)\,dx.$$

Então,

$$\theta(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C \geq 0.$$

Esta desigualdade é maior ou igual à zero se o seu discriminante fôr menor ou igual à zero, isto é,

$$B^2 - 4AC \leq 0 \Longrightarrow B^2 \leq 4AC.$$

Voltando às notações introduzidas anteriormente temos

$$\left[\int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b \phi^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)\,dx. \quad \square$$

6) Seja $f(x)$ uma função da classe $C^1_{[a,b]}$ e $f(a) = 0$. Demonstre que

$$f^2(b) \leq (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2\,dx;$$

Resolução. Vejamos a identidade

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Aplicando a desigualdade do exercício anterior para o caso quando $\phi(x) \equiv 1$ e $\psi(x) = f'(x)$ e tendo em conta que $f(a) = 0$ temos:

$$f^2(b) = \left[\int_a^b f'(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b dx \cdot \int_a^b f'^2(x)\,dx. \quad \square$$

12.3 Perguntas de controle

1) Defina valor médio duma função.
2) Demonstre o teorema de valor médio para uma função limitada.
3) Demonstre o teorema de valor médio para o produto de uma função contínua com uma função integrável.

12.4 Exercícios propostos

1) Ache o valor médio da função

$$f(x) = \cos x, \quad x \in [0, 3\pi/2].$$

2) Ache o valor médio da função

$$f(x) = \operatorname{sign} x, \quad x \in [-1, 2].$$

3) Ache o valor médio da função

$$f(x) = \sin x \sin(x + \phi), \quad x \in [0, 2\pi].$$

4) Demonstre a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = 0.$$

5) Avalie o integral

$$I = \int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + x^4}} \, dx.$$

6) Avalie o integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x}.$$

7) Defina o sinal para o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

8) Defina o sinal para o integral
$$\int_{-2}^{2} x^3 2^x \, dx.$$

9) Qual dos integrais é maior:
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx \quad \text{ou} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \ ?$$

Módulo 13

Integrais impróprios

13.1 Resumo teórico

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $[a, +\infty)$ e integrável no intervalo finito $[a, A]$. Então,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

chamaremos **integral impróprio do primeiro tipo**.

Se este limite é finito diremos que o integral **converge**, caso contrário diremos que o integral **diverge**.

De modo análogo definem-se os integrais impróprios nos intervalos $(-\infty, b]$ e $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)\,dx.$$

Destas definições implica que para $\forall\ c \in \mathbb{R}$ os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

convergem, logo converge o integral impróprio $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ e tem lugar a igualdade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Teorema 34. *Se o integral* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge, então converge o integral* $\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx$ $(A > a)$ *e vice-versa. Além disso tem lugar a igualdade*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{A} f(x)\,dx + \int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Teorema 35. *Suponhamos que* $|f(x)| \leq g(x),\ \forall x \geq A\ (A \geq a)$. *Então, se* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge implica que* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge. Se* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge implica que* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *também diverge.*

Teorema 36. *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções não negativas e* $g(x) \neq 0,\ x \in [a, +\infty)$. *Suponhamos que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Então:

1) se $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge e* $0 \leq k < +\infty$ *implica que* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge;*

2) se $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *diverge e* $0 < k \leq +\infty$ *implica que* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge.*

Em particular, se $f(x)$ *e* $g(x)$ *são funções equivalentes, quando* $x \to +\infty$, *então os integrais* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *e* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *convergem ou divergem simultâneamente.*

Teorema 37. *Suponhamos que*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\lambda}\right), \quad x \to +\infty.$$

Então, para $\lambda > 1$ *o integral* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge, para* $\lambda \leq 1$ *o integral diverge.*

Diremos que o integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **converge de modo absoluto** se converge o integral $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Se o integral impróprio $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, mas não converge de modo absoluto, diremos que **converge de modo condicional**.

Teorema 38. *Suponhamos que $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções definidas em $[a,+\infty)$ e o integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, $|g(x)| \le L$, $x \in [a,+\infty)$, $g(x)$ é monótona e tende para zero quando x tende para mais infinito. Então, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge.*

Teorema 39. *Suponhamos que:*

1) $f(x)$ é integrável em $[a,A]$ e $\left|\int\limits_a^{A} f(x)\,dx\right| \le k$;

2) $g(x)$ é monótona e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Então, o integral $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge.

Seja $f(x)$ uma função não limitada na vizinhança do ponto b e integrável em cada segmento finito $[a,b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$. Então,

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

chama-se **integral impróprio do segundo tipo**.

De modo semelhante se definem os integrais do segundo tipo:

1) $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ da função $f(x)$ numa vizinhança do ponto a e integrável no segmento $[a+\varepsilon,b]$, $(\varepsilon > 0)$;

2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, $(a < c < b)$ da função $f(x)$ não limitada numa vizinhança do ponto c e integrável nos segmentos $[a, c-\varepsilon]$ e $[c+\varepsilon, b]$, $(\varepsilon > 0)$.

A convergência do integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ advem da convergência dos integrais impróprios $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ e $\int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Teorema 40. *Suponhamos que* $f(x) = O\left[\dfrac{1}{(x-b)^\lambda}\right]$, $x \to b$, b *e* λ *são constantes. Então, se* $\lambda < 1$, *o integral* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *converge. Se* $\lambda \geq 1$ *o integral diverge.*

Os integrais impróprios usfruem das mesmas propriedades gerais do integral definido.

13.2 Exercícios resolvidos

1) Calcule $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda}$ $(a > 0)$.

Resolução. Temos aqui um integral impróprio do primeiro tipo. Por definição

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A x^{-\lambda}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_a^A \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{se} \quad \lambda > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \lambda \leq 1. \end{cases} \qquad \square$$

2) Calcule $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

Resolução. Temos aqui um integral impróprio do segundo tipo, com singularidade no ponto $x = 0$. Por definição

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx.$$

Integrando $\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx$ por partes temos:

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = x\ln x\big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon$$

e passando para o limite, quando $\varepsilon \to 0^+$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon) = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = -1.$$

Assim, $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$. $\square$

3) Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Resolução. Sendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ uma função par, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Por definição,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} x\big|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

Em conclusão temos: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$. $\square$

4) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Resolução. A função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ possui singularidade nos pontos $x=-1$ e $x=1$, sendo $f(-x)=f(x)$ e outros pontos. Então,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por definição,

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Em conclusão obtemos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi. \quad \square$$

5) Calcule $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Resolução. Temos um integral do primeiro tipo. Atendendo ao facto que

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right),$$

podemos escrever:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{2}^{A} \frac{dx}{x-1} - \int_{2}^{A} \frac{dx}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\frac{A-1}{A+2} + \ln 4\right) = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2. \quad \square$$

6) Calcule $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx \ (a>0)$.

Resolução. Por definição sabemos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-ax}\cos bx\,dx.$$

Façamos a denotação

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{A} e^{-ax}\cos bx\,dx.$$

Integrando I por partes duas vezes temos:

$$I = \frac{1}{b}\int_0^{A} e^{-ax}\,d\sin bx = \frac{1}{b}\left(e^{-ax}\sin bx\Big|_0^A + a\int_0^{A} e^{-ax}\sin bx\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}\int_0^{A} e^{-ax}\,d\cos bx \right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left[e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}\left(e^{-ax}\cos bx\Big|_0^A + a\int_0^{A} e^{-ax}\cos bx\,dx \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}e^{-aA}\cos bA + \frac{a}{b} - \frac{a^2}{b}I \right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}e^{-aA}\cos bA \right) + \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}e^{-aA}\cos bA \right) + \frac{a}{b^2}.$$

Passando ao limite, quando $A\to+\infty$, temos:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{b^2} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}. \quad \square$$

7) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

Resolução. Façamos algumas transformações no integrando:

$$f(x) = (x^2+1)\div(x^4+1) = x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\div x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\div\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$$

Seja $t = x - \dfrac{1}{x}$, então $dt = \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) dx$ e quando x varia de 0 à $+\infty$, t varia de $-\infty$ à $+\infty$. Sendo $t = x - \dfrac{1}{x}$ temos $t^2 + 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Deste modo,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = 2\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= 2\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^A = 2\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{A}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \quad \square$$

8) Chama-se valor médio de $f(x)$, no intervalo $(0, +\infty)$, ao número

$$M(f) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(\zeta)\,d\zeta.$$

(a) Calcule o valor médio para $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$;

Resolução. Vamos usar as seguintes igualdades trigonométricas:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2(x\sqrt{2}) = \frac{1+\cos 2\sqrt{2}x}{2}.$$

Então,

$$M(f) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2\sqrt{2}x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (2+\cos 2\sqrt{2}x - \cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \cos 2\sqrt{2}x\,dx - \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \cos 2x\,dx =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin 2\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x}\sin 2x =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 2\sqrt{2}x}{2\sqrt{2}x} - \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 2x}{2x} = 1. \quad \square$$

(b) Calcule o valor médio para $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

Resolução. Por definição,

$$M[f(x)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arctg} t \, dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \left(x\operatorname{arctg} x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

9) Investigue a convergência dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx$;

Resolução. Temos neste caso um integral impróprio do primeiro tipo. Com base na aditividade, é justa a igualdade:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx.$$

Para investigar a convergência do integral inicial, basta investigar a convergência do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx.$$

Quando $x \to +\infty$ é válida a equivalência

$$\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \approx \frac{1}{x^2}.$$

O integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (Teorema 36), portanto o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx$ também converge e, consequentemente, segundo o Teorema 34 converge o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \, dx$. $\square$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$;

Resolução. Temos um integral impróprio do primeiro tipo. É fácil notar que

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^{5/3}}, \quad x \to +\infty.$$

O integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$ converge, pois $\lambda = \frac{5}{3} > 1$ (Teorema 37), logo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$ converge. $\square$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$;

Resolução. É fácil ver, que a convergência do integral depende dos valores que o parâmetro p pode tomar. Se $p < 1$, o ponto 0 é ponto de singularidade, portanto é preciso partir o intervalo de integração em dois sub-intervalos, por exemplo de 0 à 1 e de 1 à $+\infty$. Então,

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Temos que

$$x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}, \quad x \to 0.$$

O integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ converge se $1-p < 1$, isto é, se $p > 0$.

Vejamos agora o segundo integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$. Como a função e^{-x} decresce mais rápidamente do que qualquer função do tipo $\dfrac{1}{x^\lambda}$, $\lambda > 1$, quando $x \to +\infty$, então este integral converge, quaisquer que sejam os valores de p. Sendo assim, o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ converge se $p > 0$. $\square$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$ $(n \geq 0)$;

Resolução. Dependendo dos valores que o parâmetro m possa tomar, vemos que o ponto $x = 0$ pode ser ponto de singularidade. Vamos, então, dividir o intervalo de integração em dois:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx.$$

Seja

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}\,dx.$$

É evidente que $\dfrac{x^m}{1+x^n} \sim x^m, \quad x \to 0$. Assim, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$ e $\displaystyle\int_0^1 x^m\,dx$ convergem ou divergem simultâneamente. O integral $\displaystyle\int_0^1 x^m\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{-m}}\,dx$ converge, se $-m < 1$, isto é, $m > -1$.

Agora vamos estudar

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx.$$

É fácil ver que

$$\frac{x^m}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^{n-m}}, \quad x \to +\infty$$

e, portanto, os integrais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-m}}$ convergem ou divergem simultâneamente. Sabemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n-m}}$ converge, se $n-m > 1$. Deste modo temos que o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$$

converge, se $n - m > 1$ e $m > -1$. $\square$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx;$

Resolução. Este integral é classificado, simultâneamente, como sendo um integral de primeiro e segundo tipos. Sendo assim, na investigação da sua convergência vamos partí-lo em dois:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx.$$

O primeiro integral à direita

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$$

é do segundo tipo, com singularidade no ponto $x = 0$. O segundo integral à direita

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$$

é do primeiro tipo. Temos:

$$\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}, \quad x \to 0.$$

Como o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{n-1}}$ converge, quando $n-1 < 1$, isto é, $n < 2$, então I_1 converge também se $n < 2$.

Vamos investigar a convergência do integral I_2, e para tal vamos introduzir a seguinte substituição: $\ln(1+x) = t$, então $x = e^t - 1$, $dx = e^t dt$. Assim,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx = \int_{e-1}^{+\infty} \frac{te^t}{(e^t-1)^n}\,dt =$$

$$= \int_{e-1}^{+\infty} \frac{t}{e^{-t}e^{nt}(1-e^{-t})^n}\,dt = \int_{e-1}^{+\infty} \frac{t}{e^{(n-1)t}(1-e^{-t})^n}\,dt.$$

Como

$$\frac{1}{(1-e^{-t})^n} \approx 1, \quad t \to +\infty,$$

então

$$\int_{e-1}^{+\infty} \frac{t}{e^{(n-1)t}(1-e^{-t})^n}\, dt \quad \text{e} \quad \int_{e-1}^{+\infty} \frac{t}{e^{(n-1)t}}\, dt$$

convergem ou divergem simultâneamente. O integral

$$\int_{e-1}^{+\infty} \frac{t}{e^{(n-1)t}}\, dt$$

converge se $n-1>0$, isto é, $n>1$. Assim, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\, dx$ converge se $1<n<2$.

□

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\, dx \ (n>0);$

Resolução. Seja $f(x)=\cos ax$ e $g(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$. A primitiva de $f(x)=\cos ax$ é $F(x)=\dfrac{1}{a}\sin ax$, que é limitada. A função $g(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$ é decrescente e tende para zero quando $x\to+\infty$. As condições do Teorema 39 cumprem-se, portanto o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\, dx$ converge. □

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx;$

Resolução. Seja

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = I_1 + I_2,$$

onde $I_1 \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$ e $I_2 \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$. O integral I_1 é do segundo tipo e I_2 é do primeiro tipo. Sabemos que

$$\frac{\sin^2 x}{x} \sim x, \quad x\to 0.$$

Como $\int\limits_0^1 x\,dx$ converge, então I_1 também converge. Vamos agora investigar a convergência do integral I_2:

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

O integral I_2 diverge, porque $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. Em conclusão o integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ diverge. $\square$

(h) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$;

Resolução. Este integral tem singularidades nos pontos $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int\limits_0^{A} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int\limits_A^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x},$$

onde $0 < A < \frac{\pi}{2}$. Vamos investigar o integral $I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{A} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$. Sabemos que

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p}, \quad x \to 0.$$

O integral $\int\limits_0^{A} \frac{dx}{x^p}$ converge se $p < 1$ daí, que I_1 também converge, se $p < 1$.

Vejamos o integral $I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_A^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$. Sabemos que

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} = \frac{1}{\sin^p x \sin^q(\frac{\pi}{2} - x)} \sim \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^q}, \quad x \to \frac{\pi}{2}.$$

O integral $\int\limits_A^{\pi/2} \frac{dx}{(\frac{\pi}{2} - x)^q}$ converge, se $q < 1$, portanto, o integral I_2 também converge para os mesmos valores de q. Deste modo concluímos que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$$

converge se $p < 1$ e $q < 1$. $\square$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$;

Resolução. Este integral, para o caso quando $n < 0$, tem singularidades nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Na sua investigação iremos partir o intervalo $[0,1]$ em dois subintervalos, por exemplo $[0,1/2]$ e $[1/2,1]$. Deste modo temos:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

Seja

$$I_1 \overset{\text{def}}{=} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

É fácil constatar que

$$\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} \sim x^n, \quad x \to 0.$$

Como o integral $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{-n}}$ converge para valores $-n < 1$, isto é, $n > -1$, então I_1 também converge se $n > -1$. Vejamos agora o integral

$$I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

Vejamos como se comporta o integrando quando $x \to 1$:

$$\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1-x}}, \quad x \to 1.$$

O integral $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$ converge, pois $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$, consequentemente I_2 converge. Em conclusão

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

converge se $n > -1$. $\square$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}$;

Resolução. Este integral tem singularidade nos pontos $x = 1$ e $x = 2$. Sendo assim vamos partir o intervalo de integração $[1, 2]$ em dois subintervalos, por exemplo, $[1, 3/2]$ e $[3/2, 2]$,. Assim,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x} = \int_1^{3/2} \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x} + \int_{3/2}^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}.$$

Seja

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{3/2} \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}.$$

Fácilmente se constata que

$$\frac{1}{(x-2)^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(-1)^p (x-1)^q}, \quad x \to 1.$$

O integral $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{dx}{(-1)^p (x-1)^q}$ converge se $q < 1$ daí, que I_1 também converge se $q < 1$. Vejamos agora o integral

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{3/2}^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}.$$

É evidente que

$$\frac{1}{(x-2)^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-2)^p \ln^q 2}, \quad x \to 2$$

daí, que o integral $\int\limits_{3/2}^{2} \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}$ converge se $p<1$, portanto I_2 também converge se $p<1$. Deste modo temos:

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}$$

converge se $p<1$ e $q<1$. $\square$

13.3 Perguntas de controle

1) Defina integral impróprio do primeiro tipo.

2) Defina integral impróprio do segundo tipo.

3) Enuncie o teorema de comparação (Teorema 35).

4) Enuncie o teorema de Dirichlet (Teorema 39).

5) Enuncie o teorema de Abel[1] (Teorema 38).

13.4 Exercícios propostos

1) Calcule os integrais:

(a) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

(b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

(c) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$;

(d) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\, dx$ $(a>0)$.

[1] Nils Hendrick Abel (1802–1829) — matemático norueguês

2) Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}\, dt}{\ln(1/x)}$.

3) Investigue a convergência dos seguintes integrais:

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\, dx \ (a \neq 0)$;

(b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n}\, dx \ (n \geq 0)$;

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$;

(d) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2}\, dx$;

(e) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\, dx$;

(f) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$;

(g) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln x)^r}$;

(h) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}\, dx$.

4) Demonstre que se $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge e $f(x)$ é monótona, então $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

5) Seja $f(x)$ uma função monótona no intervalo $0 < x \leq 1$ e não limitada na vizinhança do ponto $x = 0$. Demonstre que se existe $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, então
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

6) Se $f(x)$ é tal, que para qualquer $\varepsilon > 0$ existem os integrais
$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \ (a < c < b),$$
então entende-se por **valor principal** (denota-se $v.p$) ao múmero
$$v.p\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right).$$
De modo análogo
$$v.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$
Assim sendo, mostre que $v.p\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = 0$.

7) Mostre que $v.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = 0$.

8) Calcule $v.p\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

9) Calcule $v.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

10) Calcule $v.p\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg} x\,dx$.

Módulo 14

Aplicações do integral definido

14.1 Resumo teórico

Seja L uma curva no plano, dada na forma paramétrica

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \tag{14.1}$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são funções contínuas no segmento $[\alpha, \beta]$, tais que para diferentes valores de $t \in [\alpha, \beta]$ correspondem diferentes pontos (x, y) (isto é, não existem pontos múltiplos). Tal curva chamaremos **curva simples não fechada**. Se os pontos $A(\phi(\alpha); \psi(\alpha))$ e $B(\phi(\beta); \psi(\beta))$ coincidem, e se os restantes pontos não são múltiplos, então a curva L chamaremos **curva simples fechada**.

Seja L uma curva simples (pode ser fechada ou não fechada), dada pela equação (14.1). Vejamos uma partição qualquer τ, do segmento $[\alpha, \beta]$, gerada pelos pontos

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta.$$

À esta partição corresponde a partição, da curva L, dada pelos pontos

$$A = M_0, \ M_1, \ M_2, \ \ldots, \ M_n = B,$$

onde $M_i = M(\phi(t_i); \psi(t_i))$. Juntamos estes pontos e obtemos a quebrada $AM_1M_2 \ldots B$, cujo comprimento denotamos por $l(M_i)$ e colocamos $\Delta t = \max\limits_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1})$.

O número l é o limite dos comprimentos das quebradas $l(M_i)$, quando $\Delta t \to 0$, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal, que para qualquer partição do segmento $[\alpha, \beta]$ para a qual $\Delta t < \delta$, cumpre-se a desigualdade $0 \le l - l(M_i) < \varepsilon$.

Se existe o limite dos comprimentos das quebradas, quando $\Delta t \to 0$, então a curva L chamaremos **condensável**, e o valor l chamaremos **comprimento da curva** L.

Teorema 41. *Seja L uma curva simples dada pelas equações paramétricas*

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

onde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são duas funções que possuem, no segmento $[\alpha, \beta]$, derivadas contínuas. Então a curva L é condensável, e o seu comprimento calcula-se pela fórmula

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Se a curva L é dada pela equação

$$y = f(x), \quad a \le x \le b,$$

onde a função $f(x)$ possui, no segmento $[a, b]$, derivada contínua, então o comprimento da curva calcula-se pela fórmula

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Se a curva L é dada pela equação

$$r = r(\phi), \quad \phi_1 \le \phi \le \phi_2,$$

onde a função $r(\phi)$ possui, no segmento $[\phi_1, \phi_2]$, derivada contínua, então o comprimento da curva calcula-se pela fórmula

$$l = \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi.$$

A área S de uma figura plana, limitada por uma curva contínua, definida por $y = f(x) \ge 0$, por duas verticais $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ e o eixo das abscissas, calcula-se pela fórmula

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

A área S de uma figura plana, limitada por duas curvas contínuas $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ $(y_2(x) \geq y_1(x))$ e por duas rectas $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, calcula-se pela fórmula

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx.$$

A área S de uma figura plana, limitada por uma curva regular dada na forma paramétrica pelas equações

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

por duas verticais $x = a$ e $x = b$, e pelo segmento do eixo das abscissas, onde $x(t)$ possui derivada contínua no segmento $[t_1, t_2]$, calcula-se pela fórmula

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t)\, dt,$$

onde t_1 e t_2 são determinados pelas equações $a = x(t_1)$ e $b = x(t_2)$, sendo $y(t) \geq 0$ em $[t_1, t_2]$.

A área S de um sector, limitado pela curva contínua $r = r(\phi)$ e por duas semi-rectas $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, é dada pela fórmula

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\phi)\, d\phi.$$

O volume V de um corpo, onde $S = S(x)$ $(a \leq x \leq b)$ é a área do corte do corpo por um plano perpendicular ao eixo das abscissas, calcula-se pela fórmula

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

O volume V de um corpo, gerado pela rotação duma linha $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, à volta do eixo das abscissas, calcula-se pela fórmula

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx.$$

No caso mais geral, o volume dum corpo, gerado pela rotação à volta do eixo das abscissas de um anel, formado pelas linhas

$$y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b,$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são funções contínuas, não negativas, calcula-se pela fórmula

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\, dx.$$

Se o arco duma curva suave (isto é, diferenciável) definida por $y = f(x),\ (a \le x \le b)$ gira a volta do eixo das abscissas, então a área da superfície de rotação calcula-se segundo a fórmula

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Se a curva é dada na forma paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2,$$

possuíndo derivadas contínuas $x'(t)$ e $y'(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, então a área da superfície de rotação calcula-se segundo a fórmula

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Os **momentos estáticos** e os **momentos de inércia** do arco duma curva plana definida por $y = f(x),\ a \le x \le b$ calculam-se segundo as fórmulas:

$$M_x = \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad M_y = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$I_x = \int_a^b y^2 \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

As coordenadas do centro de gravidade $\hat{x}$ e $\hat{y}$ dum arco regular homogéneo da curva plana $y = f(x),\ a \le x \le b$ calculam-se segundo as fórmulas:

$$\hat{x} = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx}, \quad \hat{y} = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx}.$$

Os momentos estáticos e os momentos de inércia dum trapézio curvilíneo, limitado pela curva $y = f(x)$, o eixo das abscissas e duas rectas $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, calculam-se segundo as fórmulas:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y = \int_a^b xy\,dx, \quad I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 y\,dx.$$

As coordenadas do centro de gravidade de uma figura plana de massa M, calculam-se segundo as fórmulas $\hat{x} = \dfrac{M_y}{M}$ e $\hat{y} = \dfrac{M_x}{M}$. No caso da figura homogénea a sua massa é igual á área dessa figura.

O trabalho realizado por uma força variável $F = f(x)$, que actua na direcção do eixo OX ao longo do segmento $[a, b]$, calcula-se segundo a fórmula:

$$W = \int_a^b f(x)\,dx.$$

14.2 Exercícios resolvidos

1) Calcule a área da figura limitada pela parábola $y = 4x - x^2$ e o eixo OX.

Resolução. A parábola $y = 4x - x^2$ tem concavidade virada para baixo e os seus zeros são $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Logo, ao calcularmos a área, virá:

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}. \quad \square$$

2) Calcule a área da figura limitada por um arco do ciclóide

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

e o eixo OX.

Resolução. Aplicando, directamente, a fórmula virá:

$$\int_0^{2\pi} 4(1-\cos t)^2\,dt = 4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = 4\left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = 12\pi. \quad \square$$

3) Ache a área da figura limitada pela leminiscata $\rho^2 = 2\cos 2\theta$.

Resolução. Aplicando a fórmula para o cálculo da área da figura, para o caso quando a linha que limita essa figura é dada em coordenadas polares, e tendo em conta que basta calcular a quarta parte da área, correspondente à variação $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$, virá:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta \, d\theta = 2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4} = 2. \quad \Box$$

4) Calcule o comprimento do arco da curva definida por $y^2 = x^3$ de $x = 0$ até $x = 1$, $y \ge 0$.

Resolução. Começamos por achar $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. Aplicando, directamente, a fórmula temos:

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right). \quad \Box$$

5) Calcule o comprimento do arco da curva

$$x = \cos^5 t, \quad y = \sin^5 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Resolução. Vamos, primeiro, achar as derivadas de $x(t)$ e $y(t)$:

$$x'(t) = -5\cos^4 t \cdot \sin t, \quad y'(t) = 5\sin^4 t \cdot \cos t.$$

Agora, aplicando directamente a fórmula do cálculo do comprimento do arco duma curva dada na forma paramétrica, virá:

$$L = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\cos^4 t \cdot \sin t)^2 + (5\sin^4 t \cdot \cos t)^2}\, dt = 5\int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}\, dt =$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2t}\, dt = -\frac{5}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\, d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3} \cdot \cos 2t + \sqrt{1 + 3\cos^2 2t})\right]\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{5}{8}\left(2 - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right). \quad \Box$$

6) Ache o comprimento do arco da curva $\rho = \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução. Primeiro achamos a derivada $\rho' = \sin^2 \dfrac{\theta}{3} \cos \dfrac{\theta}{3}$. Agora, pela fórmula que permite calcular o comprimento do arco dado no sistema polar, virá:

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6 \frac{\theta}{3} + \left(\sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos \frac{2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}). \quad \square$$

7) Ache o volume do corpo gerado pela rotação à volta do eixo OX da figura limitada pela curva $y^2 = (x-1)^3$ e pela recta $x = 2$.

Resolução. A curva $y^2 = (x-1)^3$ intersecta o eixo das abscissas quando $x = 1$. Assim,

$$V = \pi \int_1^2 y^2\, dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3\, dx = \frac{1}{4}\pi (x-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

8) Ache a área da superfície formada pela rotação, à volta do eixo OX, do arco do sinusóide $y = \sin 2x$ de $x = 0$ até $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução. Achamos, primeiro, $y' = 2\cos 2x$. Então,

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\, dx.$$

Façamos a mudança de variável: $2\cos 2x = t$, $-4\sin 2x\, dx = dt$, $\sin 2x\, dx = -\dfrac{1}{4}\, dt$. Vamos achar os limites de integração após esta mudança: se $x = 0$, então $t = 2$, se $x = \dfrac{\pi}{2}$, então $t = -2$. Deste modo temos:

$$S_x = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{-2}^{2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)\right]. \quad \square$$

9) Calcule o momento estático e o momento de inércia da semi-circunferência $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $(-r \le x \le r)$ em relação ao eixo OX.

Resolução. O momento estático M_x iremos calcular segundo a fórmula

$$M_x = \int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Assim, e tendo em consideração que $y' = -\dfrac{x}{r^2 - x^2}$, virá:

$$M_x = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r\int\limits_{-r}^{r} dx = 2r^2.$$

O momento de inércia calculamos segundo a fórmula

$$I_x = \int\limits_a^b y^2\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Deste modo,

$$I_x = \int\limits_a^b (r^2 - x^2)\sqrt{1 + \frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = r\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2r\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Introduzindo a substituição $x = r\sin t$ e tendo em conta que $dx = r\cos t\, dt$ temos:

$$I_x = 2r\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t\, dt = r^3\int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{\pi r^3}{2}. \quad \square$$

10) Ache as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pelos eixos coordenados e pelo arco da elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ que se encontra no primeiro quadrante;

Resolução. No primeiro quadrante, quando x cresce de 0 até a, vemos que t decresce de $\pi/2$ até 0. Assim,

$$\hat{x} = \frac{4}{\pi ab}\int\limits_0^a xy\, dx = \frac{4}{\pi ab}\int\limits_{\pi/2}^{0} a\cos t \cdot b\sin t(-a\sin t)\, dt =$$

$$= \frac{4a^2b}{\pi ab} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{4a^2b}{3\pi ab}$$

e

$$\hat{y} = \frac{2}{\pi ab} \int\limits_0^a y^2 \, dx = \frac{2}{\pi ab} \int\limits_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot b \sin t(-a \sin t) \, dt =$$

$$= -\frac{2b}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \, d\cos t = \frac{4b}{3\pi}. \quad \square$$

11) Que trabalho é necessário realizar para esticar, em 4 cm, uma mola, se sabemos que a força de 1 Newton estica 1 cm da mola?

    Resolução. Segundo a lei de Hooke[1], a força F necessária para esticar uma mola em x metros é igual à $F = kx$. O coeficiente de proporcionalidade k achamos a partir da condição: se $x = 0.01$ metros, então $F = 1$ Newton, logo $k = 100$. Assim,

$$W = \int\limits_0^{0.04} 100x \, dx = 50x^2 \Big|_0^{0.04} = 0.08. \quad \square$$

14.3 Perguntas de controle

1) Explique o conceito de curva simples fechada.

2) Escreva a fórmula que permite calcular o comprimento de uma curva condensável.

3) Escreva a fórmula que permite calcular a área de uma figura plana dada em coordenadas polares.

4) Escreva as fórmulas que permitem calcular os momentos estáticos e os momentos de inércia do arco duma curva plana.

[1]Robert Hooke (1635–1703) — matemático, físico e inventor inglês

14.4 Exercícios propostos

1) Ache a área da figura limitada pela parábola $y = 4x - x^2$ e o eixo OX.

2) Calcule o comprimento do arco da curva $y = \ln \sin x$ de $x = \dfrac{\pi}{3}$ até $x = \dfrac{\pi}{2}$.

3) Calcule o comprimento do arco da curva

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le \ln \pi.$$

4) Ache o comprimento do arco da curva $\rho = \theta^2$, $0 \le \theta \le \pi$.

5) Ache o volume do corpo gerado pela rotação à volta do eixo OX da figura limitada pelas curvas $y^2 = x$, $x^2 = y$.

6) Ache a área da superfície formada pela rotação, à volta do eixo OX, da curva $y = x^3$ de $x = 0$ até $x = \dfrac{1}{2}$.

7) Calcule o momento de inércia da área da elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ em relação ao eixo OY.

8) Ache as coordenadas do centro de gravidade da figura limitada pelas linhas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \cos x$.

Módulo 15

Séries numéricas

15.1 Resumo teórico

Vejamos a sucessão de termo geral u_n e, formalmente, façamos a partir dos seus termos uma soma infinita

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{15.1}$$

A soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ chamaremos **série numérica** de termo geral u_n. A soma dos primeiros n termos, isto é,

$$S_n \overset{\text{def}}{=} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

chamaremos $n-$ **ésima soma parcial** da série (15.1).

Diremos que a série (15.1) é **convergente** (**divergente**) se converge (diverge) a sucessão S_n de suas somas parciais. Ao limite de S_n chamaremos **soma** S da série (15.1).

Teorema 42. *(Condição necessária de convergência)*
Se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge, então* $\lim u_n = 0$.

Teorema 43. *(Critério qualitativo de Cauchy)*
As duas afirmações são equivalentes:

1) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge;*

2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ \forall\, p > 0,\ p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

15.2 Exercícios resolvidos

1) Dada a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

mostre, utilizando a definição, que ela é convergente.

Resolução. Por definição, afirmar que uma série é convergente significa que converge a sucessão de suas somas parciais. Vejamos a soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Decompomos a fracção $\dfrac{1}{k(k+1)}$ em fracções simples: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Voltando à soma parcial S_n temos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

A sucessão $1 - \dfrac{1}{n+1}$ converge para 1, portanto a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e a sua soma é igual à 1. $\square$

2) Utilizando a definição mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

é convergente.

Resolução. Compomos a soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}};$$

vemos que S_n é a soma de n termos duma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 1 e a razão é igual à $-\dfrac{1}{2}$. Em conclusão:

$$S_n = \frac{[1 - (-\frac{1}{2})^n]}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right],$$

que tende para $S = \dfrac{2}{3}$. $\square$

3) Ache a soma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha, \quad |q| < 1.$$

Resolução. Vamos compor duas somas:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k \sin k\alpha$$

e

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} q^k \cos k\alpha,$$

onde S_n e C_n são as somas parciais das séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha$, respectivamente. Usando a fórmula de Euler[1]

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

vamos achar a expressão $C_n + iS_n$, onde $i = \sqrt{-1}$:

$$C_n + iS_n = \sum_{k=1}^{n} q^k(\cos k\alpha + i \sin k\alpha) = \sum_{k=1}^{n} q^k e^{ik\alpha} = \sum_{k=1}^{n} (qe^{i\alpha})^k,$$

que é, afinal, a soma de n termos da progressão geométrica de razão $qe^{i\alpha}$, cujo primeiro termo é $qe^{i\alpha}$. Tendo em consideração o facto $|q| < 1$, então $|qe^{i\alpha}| < 1$. Assim,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=1}^{n} (qe^{i\alpha})^k = qe^{i\alpha} \frac{[1 - (qe^{i\alpha})^n]}{1 - qe^{i\alpha}}.$$

Calculando o limite obtemos:

$$\lim(C_n + iS_n) = C + iS = \frac{qe^{i\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}} = \frac{q(\cos\alpha + i \sin\alpha)}{(1 - q\cos\alpha) - iq\sin\alpha} =$$

$$= \frac{q(\cos\alpha + i\sin\alpha)[(1 - q\cos\alpha) + iq\sin\alpha]}{1 - 2q\cos\alpha + q^2} =$$

[1] Leonhard Euler (1707–1783) — matemático alemão

$$= \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2} + i\frac{\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

Em conclusão, basta igualar as partes reais e as partes imaginárias:

$$C = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}, \quad S = \frac{\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \quad \square$$

4) Ache a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

Resolução. Basta, sómente, compor a soma parcial:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) =$$

$$= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \cdots +$$

$$+(\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n+1})+$$

$$+(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

Calculando o limite da soma parcial obtemos $S = 1 - \sqrt{2}$. $\square$

5) Utilizando o critério qualitativo de Cauchy mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$$

converge.

Resolução. Pegamos os termos S_{n+p} e S_n e vamos mostrar que para $p > 0$, $p \in \mathbb{N}$ e $n > N$ o módulo da diferença é menor que um ε dado. Com efeito:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \cdots + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p}\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \cdots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) + \frac{1}{n+p} =$$
$$= \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Longrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Concluímos que $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ se $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1\right]$. $\square$

6) Utilizando o critério qualitativo de Cauchy mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Resolução. Avaliamos o módulo da diferença dos termos S_{n+p} e S_n:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right| >$$
$$> \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

Nós usamos a avaliação

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+p}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Fazendo $p = n$, então $|S_{2n} - S_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. $\square$

7) Utilizando o critério qualitativo de Cauchy mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

diverge.

Resolução. Fazendo $\varepsilon = \frac{1}{4}$ e $p = n$, avaliamos a diferença

$$|S_{2n} - S_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\right|.$$

Atendendo que $n+i < n+i+1$, temos a avaliação $\frac{1}{\sqrt{n+i}} > \frac{1}{\sqrt{n+i+1}}$. Em conclusão,

$$|S_{2n} - S_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+2} \cdot \sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2n+1}}\right| >$$
$$> \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} > \frac{n}{2n+1} > \frac{1}{4}. \quad \square$$

8) Diga se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ converge.

Resolução. O termo geral $u_n = \frac{n}{2n-1}$ da série tende para $\frac{1}{2} \neq 0$, portanto a condição necessária não se cumpre. Consequentemente, a série diverge. $\square$

15.3 Perguntas de controle

1) Defina série numérica.

2) Diga, por suas palavras, o que entende por série convergente.

3) Enuncie o critério qualitativo de Cauchy.

4) Demonstre o teorema sobre a condição necessária de convergência.

15.4 Exercícios propostos

1) Demonstre a convergência e ache a soma das séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$.

2) Utilizando o critério qualitativo de Cauchy mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$$

converge.

3) Utilizando o critério qualitativo de Cauchy mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge, para $\alpha > 1$.

4) Utilizando o critério qualitativo de Cauchy mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge.

Módulo 16

Critérios de convergência para séries de sinal positivo

16.1 Resumo teórico

Teorema 44. *(Primeiro critério de comparação)*

Sejam u_n *e* v_n *duas sucessões numéricas e suponhamos que, para* $n > N$, *se cumpre a desigualdade* $0 \le u_n \le v_n$. *Então:*

1) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge implica que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *também converge;*

2) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge implica que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *também diverge.*

Sejam u_n e v_n duas sucessões numéricas. Diremos que u_n é **equivalente** à v_n (usa-se a denotação $u_n \sim v_n$), quando n tende para infinito, se

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Teorema 45. *(Segundo critério de comparação)*

Suponhamos que $u_n \sim v_n$. *Então as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergem ou divergem simultâneamente.*

Teorema 46. *(Critério de d'Alembert[1])*

[1] Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) — matemático francês

Suponhamos que para o termo geral u_n *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ *se cumpre a igualdade*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda.$$

Então:

1) Se $\lambda < 1$ *a série converge;*

2) Se $\lambda > 1$ *a série diverge;*

3) Se $\lambda = 1$ *nada se pode dizer sobre a convergência da série.*

Teorema 47. *(Critério radical de Cauchy)*

Suponhamos que para o termo geral u_n *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ *se cumpre a igualdade*

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lambda.$$

Então:

1) Se $\lambda < 1$ *a série converge;*

2) Se $\lambda > 1$ *a série diverge;*

3) Se $\lambda = 1$ *nada se pode dizer sobre a convergência da série.*

Teorema 48. *(Critério de Raabe[2])*

Suponhamos que para o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ *se cumpre a igualdade*

$$\lim n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right) = \lambda.$$

Então:

1) Se $\lambda > 1$ *a série converge;*

2) Se $\lambda < 1$ *a série diverge;*

3) Se $\lambda = 1$ *nada se pode dizer sobre a convergência da série.*

---

[2] Joseph Ludwig Raabe (1801–1854) — matemático suíço

Teorema 49. *(Critério de Gauss[3])*

Suponhamos que para o termo geral u_n *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ *se cumpre a igualdade*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Então:

1) *Se* $\lambda > 1$ *a série converge;*

2) *Se* $\lambda < 1$ *a série diverge;*

3) *Se* $\lambda = 1$ *e* $\mu > 1$ *a série converge;*

4) *Se* $\lambda = 1$ *e* $\mu \le 1$ *a série diverge.*

Teorema 50. *(Critério de Jamet)*

A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \ge 0$ *converge se*

$$(1 - \sqrt[n]{u_n})\,\frac{n}{\ln n} \ge p > 1,$$

e diverge se

$$(1 - \sqrt[n]{u_n})\,\frac{n}{\ln n} \le 1,$$

para $n > N$*.*

Teorema 51. *(Critério integral de Cauchy)*

Se $f(x)\ \ (x \ge 1)$ *é uma função não negativa, decrescente e contínua, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge ou diverge simultâneamente com o integral* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$*.*

16.2 Exercícios resolvidos

1) Utilizando os critérios de comparação, d'Alembert ou Cauchy, investigue a convergência das seguintes séries:

[3] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) — matemático alemão

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$;

Resolução. Verificamos, inicialmente, se a condição necessária de convergência cumpre-se, isto é, se o termo geral da série tende para zero. Com efeito:

$$\lim \sin\frac{\pi}{2^n} = \sin 0 = 0.$$

Vamos investigar a convergência da série usando o critério de comparação:

$$\sin\frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}, \quad n \to \infty,$$

porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ é a soma infinita de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$, cujo primeiro termo é $\dfrac{\pi}{2}$. Assim,

$$S = \frac{\pi}{2} \lim \frac{[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}} = \pi.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ converge, portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ também converge. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$;

Resolução. A condição necessária cumpre-se, pois $\dfrac{1+n}{1+n^2} \to 0$. Aplicando o critério de comparação temos

$$u_n = \frac{1+n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n} = v_n.$$

A série harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Com efeito:

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p};$$

pegando $p = n$ obtemos $|x_{2n} - x_n| \geq \dfrac{n}{n+n} = \dfrac{1}{2}$. Daqui vemos que a sucessão S_n de somas parciais não satisfaz o critério qualitativo de Cauchy. Pelo Teorema 45 a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ diverge. □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

Resolução. A condição necessária cumpre-se, pois $\lim\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 = 0$. Temos $\dfrac{1+n^2}{1+n^3} \sim \dfrac{1}{n}$, consequentemente $\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 \sim \dfrac{1}{n^2}$, $n \to \infty$. Basta investigar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Aplicando o critério qualitativo de Cauchy, para $p = n$, temos:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{4n^2} < n\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge então, pelo Teorema 45, a série inicial converge. □

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$;

Resolução. Façamos, primeiro, algumas transformações algébricas no termo geral da série, para tal vamos multiplicar e dividir pelo conjugado:

$$u_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

Nesta forma fácilmente vemos que o termo geral tende para zero, portanto cumpre-se a condição necessária de convergência. Tendo em conta que

$$\sqrt{n}+\sqrt{n-1} \sim 2\sqrt{n},$$

quando $n \to \infty$, então

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad n \to \infty.$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge, consequentemente a série inicial

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

também diverge, devido ao segundo critério de comparação. □

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}}{n}$;

Resolução. Façamos, como no exercício anterior, algumas transformações algébricas no termo geral da série, para tal vamos multiplicar e dividir pelo conjugado:

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right) = \frac{2n+2}{n\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1}\right)}.$$

Nesta forma fácilmente vemos que o termo geral tende para zero, portanto cumpre-se a condição necessária de convergência. Tendo em conta que

$$\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n-1} \sim 2n,$$

quando $n \to \infty$, então $\dfrac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}) \sim \dfrac{2n}{n \cdot 2n} = \dfrac{1}{n}$, $n \to \infty$. A série harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, consequentemente a série inicial

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}}{n}$$

também diverge, devido ao segundo critério de comparação. □

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}, \quad 0 < x < 3\pi$;

Resolução. Temos, para $1 \le n < \infty$, $0 < \dfrac{x}{3^n} \le \dfrac{x}{3} < \pi$, pois $0 < x < 3\pi$. Assim,

$$0 < 2^n \sin\frac{x}{3^n} < 2^n \cdot \frac{x}{3^n} = x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < 3\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pelo teorema sobre sucessões intercaladas temos que o termo geral $u_n = 2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$ converge para zero, pois $3\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ é um infinitésimo. A condição necessária de convergência, para a série dada, cumpre-se. Em conclusão, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, consequentemente a série inicial

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}, \quad 0 < x < 3\pi$$

também converge, segundo o teorema de comparação. □

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$;

Resolução. A condição necessária de convergência cumpre-se, porque o termo geral da série é um infinitésimo. Na investigação da convergência vamos usar o critério de d'Alembert. Assim:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = \lim \frac{2^{n+1} \cdot (n+1) n! n^n}{2^n \cdot n! (n+1)^{n+1}} = \lim \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 2 \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 2 \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = 2 \cdot e^{\lim(-\frac{n}{n+1})} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} < 1,$$

portanto, a série converge. $\square$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$;

Resolução. A condição necessária de convergência cumpre-se, porque o termo geral da série é um infinitésimo. Na investigação da convergência vamos usar, como no exercício anterior, o critério de d'Alembert. Assim:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} =$$

$$= \lim \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1,$$

portanto a série converge. $\square$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;

Resolução. Verificamos se a condição necessária de convergência se cumpre. Temos que $2^n = (1+1)^n = 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\cdots > \dfrac{n(n-1)}{2!}$, portanto $0 < \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1} \to 0$, $n \to \infty$. Pelo teorema de sucessões intercaladas concluímos que o termo geral é um infinitésimo.

Aplicando o critério de d'Alembert:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

A série converge. $\square$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$;

Resolução. Aplicando duas vezes o teorema de Stolz[4] temos:

$$\lim \frac{n^2}{4^n} = \lim \frac{2n+1}{3\cdot 4^n} = \lim \frac{2}{9\cdot 4^n} = 0.$$

A condição necessária cumpre-se. Em conclusão, aplicando o critério de d'Alembert temos

$$\lim \frac{(n+1)^2\cdot 4^n}{n^2\cdot 4^{n+1}} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1,$$

daí que a série converge. $\square$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$;

Resolução. Aplicando, directamente, o critério de d'Alembert temos:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Portanto a série converge. $\square$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$;

Resolução. Vamos fazer algumas avaliações:

$$\cos^2 k\alpha \geq 0 \Longrightarrow 1+x^2+\cos^2 k\alpha \geq 1+x^2 \Longrightarrow \frac{1}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Assim,

$$\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \leq \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

consequentemente

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \leq \underbrace{\frac{1}{1+x^2}\cdots\frac{1}{1+x^2}}_{n \text{ vezes}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Suponhamos que $x=0$, então a nossa série converge. Se $x \neq 0$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x^2)^n}.$$

Aplicando o critério de d'Alembert para a série majorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x^2)^n}$, $x \neq 0$, temos:

$$\lim \frac{(n+1)(1+x^2)^n x}{n(1+x^2)^{n+1} x} = \lim \frac{n+1}{n(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} < 1.$$

Em conclusão, já que a série majorante converge, a nossa série converge. $\square$

[4] Otto Stolz (1842–1905) — matemático alemão

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

Resolução. O critério necessário de convergência não se cumpre:

$$\lim \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} = \lim \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n(1+\frac{1}{n^2})^n} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} = 1 \neq 0.$$

Portanto a série diverge. □

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)}$;

Resolução. A condição necessária cumpre-se, pois o termo geral tende para zero. Aplicando o critério radical de Cauchy obtemos:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(1+n)}} = \lim \frac{1}{\ln(1+n)} = 0 < 1.$$

Em conclusão, a série converge. □

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

Resolução. É evidente que o termo geral tende para zero. Aplicando o critério radical de Cauchy temos:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

A série converge. □

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$;

Resolução. O termo geral é um infinitésimo. Aplicando o critério de Cauchy temos:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^3}(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

A série converge. □

2) Utilizando os critérios de Raabe ou Gauss, investigue a convergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$;

Resolução. Aplicando o critério de Raabe temos:

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim n\left[\frac{(2n-1)!!(2n+2)!!(2n+3)}{(2n)!!(2n+1)!!(2n+1)}-1\right]=$$

$$=\lim n\left[\frac{(2n-1)!!(2n+2)(2n)!!(2n+3)}{(2n)!!(2n+1)(2n-1)!!(2n+1)}-1\right]=$$

$$=\lim n\left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right]=\lim n\left(\frac{6n+5}{4n^2+4n+1}\right)=$$

$$=\lim\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}=\frac{3}{2}>1.$$

A série converge. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}, \quad x>0;$

Resolução. Aplicamos o critério de Raabe:

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim n\left[\frac{n!(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)}{(n+1)!(x+1)\cdots(x+n)}-1\right]=$$

$$=\lim n\left(\frac{x+n+1}{n+1}-1\right)=\lim n\left(\frac{x}{n+1}\right)=x.$$

Em conclusão: para $x>1$ a série converge, para $x<1$ a série diverge. □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}};$

Resolução. Neste exercício vamos utilizar a seguinte decomposição assimptótica:

$$\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}, \quad n\to\infty.$$

Assim,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n!e^n(n+1)^{n+p+1}}{(n+1)!e^{n+1}\cdot n^{n+p}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}=$$

$$=\frac{1}{e}\cdot e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})}\sim e^{-1+(n+p)(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2})}=e^{\frac{p-\frac{1}{2}}{n}}-1+1\sim 1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n}, \quad n\to\infty.$$

Portanto,

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim n\left(\frac{p-\frac{1}{2}}{n}\right)=p-\frac{1}{2}=\lambda.$$

A série converge se $\lambda>1$, isto é, $p-\dfrac{1}{2}>1\Longrightarrow p>\dfrac{3}{2}$. □

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^p$;

Resolução. Vejamos a expressão

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdots 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^p\cdot\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)}{1\cdots 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}\right]^p=$$

$$=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p\sim 1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2},\quad n\to\infty.$$

Segundo o critério de Gauss a série converge, para valores de $p>2$. □

16.3 Perguntas de controle

1) Enuncie e demonstre o teorema de comparação.
2) Enuncie o critério de d'Alembert.
3) Enuncie o critério qualitativo de Cauchy.
4) Suponhamos que ao investigar a convergência duma série você aplicou o critério de d'Alembert e encontrou $\lambda=1$. Que conclusões tira deste facto?
5) Diga o que entende por sucessões equivalentes.
6) Enuncie o critério de Raabe. Dê um exemplo, onde este critério é aplicável.
7) No resumo teórico supõe-se que o termo geral da série é positivo. Como aplicaria os critérios por si conhecidos, caso o termo geral fosse negativo?

16.4 Exercícios propostos

1) Com ajuda do teorema de comparação investigue a convergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

2) Utilizando o critério de d'Alembert diga quais das séries convergem e quais divergem:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!2^n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$.

3) Utilizando o critério radical de Cauchy investigue a convergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)^n$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$.

4) Utilizando o critério de Raabe ou Gauss investigue a convergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}, \quad q > 0;$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}.$

5) Investigue a convergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}};$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b});$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{ctg}\frac{n\pi}{4n-2} - \sin\frac{n\pi}{2n+1}\right);$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right);$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\sqrt{n}};$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(\sin\frac{1}{n})};$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$

Módulo 17

Critérios de convergência para séries de sinal arbitrário

17.1 Resumo teórico

A série numérica de termos de sinal arbitrário $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge de modo **absoluto** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge. A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge de modo **condicional** se ela converge, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ diverge.

Teorema 52. *(Critério de Leibniz)*

Suponhamos que $u_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *e além disso se cumprem as condições:*

1) u_n *é decrescente, isto é,* $u_{n+1} \leq u_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

2) $\lim u_n = 0$.

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ *converge.*

Teorema 53. *(Critério de Dirichlet)*

Sejam a_n *e* b_n *os termos gerais de duas sucessões tais, que:*

1) a_n *é decrescente e* $\lim a_n = 0$.

2) $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *é limitada.*

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

Teorema 54. *(Critério de Abel)*

Sejam a_n *e* b_n *os termos gerais de duas sucessões tais, que:*

1) b_n *é monótona e limitada.*

2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.*

17.2 Exercícios resolvidos

1) Investigue a convergência absoluta e convergência condicional da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Resolução. Por definição a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge de modo absoluto se converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Sabemos que esta última série converge se $p > 1$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge condicionalmente se ela converge, mas não converge de modo absoluto. O termo $u_n = \frac{1}{n^p}$ é decrescente e tende para zero se $p > 0$ e, consequentemente, pelo critério de Leibniz ela converge para valores de $p > 0$. Em conclusão: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge condicionalmente se $0 < p \leq 1$ e converge de modo absoluto se $p > 1$. $\square$

2) Investigue a convergência condicional e convergência absoluta da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right].$$

Resolução. Suponhamos que $p \leq 0$, então o termo geral $\ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ não tende para zero, portanto a série diverge.

Suponhamos, então, que $p > 0$. Utilizamos a equivalência

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right] \sim \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}}, \quad n \to \infty.$$

A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ converge, segundo o critério de Leibniz, se $p > 0$ e a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ converge se $2p > 1$, isto é, $p > \frac{1}{2}$. Assim, a nossa série converge se $p > \frac{1}{2}$.
Vamos analisar a convergência absoluta. Tendo em conta que

$$\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]\right| \sim \frac{1}{n^p}, \quad n \to \infty,$$

então, pelo critério de comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ converge de modo absoluto, para valores de $p > 1$. Já que converge para $p > \frac{1}{2}$, então para $\frac{1}{2} < p \leq 1$ ela converge condicionalmente. $\square$

3) Investigue a convergência condicional e convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

Resolução. Por definição, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge absolutamente se convergir a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$. Tendo em conta que $\frac{1}{n+x} \sim \frac{1}{n}$ então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ diverge, portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ não converge de modo absoluto. Contudo, pelo critério de Leibniz, se $x \neq -n$, $n = 1, 2, \ldots$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge, portanto ela converge condicionalmente.
$\square$

4) Investigue a convergência condicional e convergência absoluta da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$.

Resolução. Para valores de p tais, que $p \leq 0$, o termo geral não tende para zero, o que significa que a série diverge. Pegando $p > 0$ e fazendo algumas transformações no termo geral temos:

$$\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^{n-1}]^p} = \frac{(-1)^n}{n^p\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]^p} = (-1)^n \cdot n^{-p}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]^{-p} \sim$$

$$\sim (-1)^n \cdot n^{-p} \left[1 + p \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}}, \quad n \to \infty.$$

Para $p > 0$ a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ converge, pelo critério de Leibniz, e a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p}{n^{p+1}}$ converge, segundo o teorema de comparação. Assim, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$ converge, para valores de $p > 0$. Vejamos a convergência absoluta da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$, isto é, a convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$. Tendo em conta que

$$-1 \leq (-1)^{n-1} \leq 1 \Longrightarrow n-1 \leq n+(-1)^{n-1} \leq n+1 \Longrightarrow (n-1)^p \leq$$

$$\leq [n+(-1)^{n-1}]^p \leq (n+1)^p \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{[n+(-1)^{n-1}]^p} \leq \frac{1}{(n-1)^p}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^p}$ converge, se $p > 1$; pelo critério de comparação implica que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$ converge, para valores $p > 1$. Em conclusão, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^{n-1}]^p}$ converge de modo absoluto, para valores $p > 1$, e converge de modo condicional para valores $0 < p \leq 1$. $\square$

5) Demonstre a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Resolução. Fazendo $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ e multiplicando ambos os lados por $2\sin\frac{x}{2}$ temos:

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot S_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin kx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right] = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x =$$

$$= 2\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x \cdot \sin\frac{n}{2}x.$$

Em conclusão: $S_n = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2})x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. $\square$

6) Investigue a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Resolução. Fazendo $a_n = \dfrac{\ln^{100} n}{n}$ e $b_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$, vamos verificar se as condições do critério de Dirichlet se cumprem. Denote-se $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin k\dfrac{\pi}{4}$. Pelo exercício anterior temos:

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\frac{\pi}{4}\right| = \left|\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{8}\sin n\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

isto é, a sucessão B_n é limitada, cumpre-se o ponto 2) do critério de Dirichlet. O ponto 1) também se cumpre, pois $\dfrac{\ln^{100} n}{n}$ é decrescente a partir de valores $n > e^{100}$ e tende para zero.

Em conclusão, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin\dfrac{n\pi}{4}$ converge. $\square$

7) Demonstre a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos kx = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

Resolução. Fazendo $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \cos kx$ e multiplicando a esquerda e direita por $2\cos\dfrac{x}{2}$ temos:

$$2\cos\frac{x}{2} \cdot C_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2\cos\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{2k+1}{2}x + \cos\frac{2k-1}{2}x\right) = -\cos\frac{x}{2} + (-1)^n \cos\frac{2n+1}{2}x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C_n = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

Nota. Nós utilizamos a fórmula

$$2\cos\frac{x}{2}\cos kx = \cos\frac{2k+1}{2}x + \cos\frac{2k-1}{2}x. \quad \square$$

8) Demonstre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos 2n$$

converge.

Resolução. Fazendo $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n \cos 2n$ temos:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ é decrescente e tende para zero;

b) com base no exercício anterior e fazendo $x = 2$ temos

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos 2k \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n \cos(2n+1)}{2\cos 1} \right| < \frac{1 + \cos^{-1} 1}{2}.$$

Portanto, já que as condições do critério de Dirichlet se cumprem, implica que a série converge. $\square$

9) Investigue a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}.$$

Resolução. Fazendo $\sin^2 n = \dfrac{1 - \cos 2n}{2}$, reescrevemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2n)}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \left(\frac{1 - \cos 2n}{n} \right).$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, segundo o critério de Leibniz, e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2n}{n}$ também converge, segundo o critério de Dirichlet. Em conclusão, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$$

converge. $\square$

10) Investigue a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Resolução. Vamos multiplicar e dividir o termo geral pelo conjugado $\sqrt{n}-(-1)^n$:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}.$$

Assim, a investigação da convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

resume-se em verificar se a série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ converge, pois a série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ converge, segundo o critério de Leibniz. Em conclusão a série

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

diverge, porque diverge a série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$. $\square$

11) Investigue a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}).$$

Resolução. Vamos verificar se a condição necessária de convergência se cumpre. Fazendo algumas transformações ao termo geral

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})=(-1)^n\sin[\pi(\sqrt{n^2+k^2}-n)]=$$
$$=(-1)^n\sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\to 0,\quad n\to\infty,$$

portanto a condição necessária de convergência cumpre-se. Aplicando o critério de Leibniz vemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$$

converge. $\square$

12) Investigue a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cdot\cos\frac{\pi n^2}{n+1}.$$

Resolução. Vamos transformar o termo geral. Temos

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - n\pi\right) = (-1)^n\cos\left(\pi\frac{n^2+1-1}{n+1} - \pi n\right) =$$

$$= (-1)^n\cos\left[\pi\frac{(n+1)(n-1)+1}{n+1} - \pi n\right] = (-1)^n\cos\left[\pi(n-1) + \frac{\pi}{n+1} - \pi n\right] =$$

$$= (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{n+1} - \pi\right) = (-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Assim,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cdot\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Em conclusão, aplicando o critério de Abel, vemos que a série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ converge (segundo o critério de Leibniz) e a sucessão $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ é monótona e limitada. Pelo critério de Abel concluímos que a série inicial converge. $\square$

13) Investigue a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}.$$

Resolução. Fazendo $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \sin n\cdot\sin n^2$ constatamos que a_n é decrescente e tende para zero e que a sucessão de somas parciais

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\cdot\sin k^2\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}[\cos k(k-1) - \cos k(k+1)]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|1-\cos n(n+1)| \le 1$$

é limitada. As condições do critério de Dirichlet cumprem-se, portanto a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$$

converge. $\square$

14) Investigue a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2.$$

Resolução. Vamos primeiro verificar se o termo geral da série tende para zero. Suponhamos que seja verdade, então $\sin(n+1)^2 \to 0$. Assim,

$$\lim \sin(n+1)^2 = \lim \sin(n^2+2n+1) =$$

$$= \lim\left[\sin n^2 \cdot \cos(2n+1) + \cos n^2 \cdot \sin(2n+1)\right] = \lim \cos n^2 \cdot \sin(2n+1) =$$

$$= \lim \sin(2n+1) \cdot \sqrt{1-\sin^2 n^2} = \lim \sin(2n+1) = 0.$$

De acordo com a última igualdade temos, que

$$\lim \sin(2n+3) = \lim \sin\left[(2n+1)+2\right] = \lim\left[\sin(2n+1)\cos 2 + \cos(2n+1)\sin 2\right] =$$

$$= \sin 2 \cdot \lim \cos(2n+1) = 0.$$

Já que $\lim \sin(2n+1) = 0$ e $\lim \cos(2n+1) = 0$, então

$$\lim \sin^2(2n+1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim \cos^2(2n+1) = 0.$$

Em conclusão

$$\lim\left[\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)\right] = 0$$

o que contradiz a fórmula fundamental da trigonometria. Portanto a série diverge. $\square$

17.3 Perguntas de controle

1) Enuncie o critério de Leibniz.

2) Dê a definição de convergência absoluta e convergência condicional.

3) Enuncie o critério de Abel.

4) Enuncie o critério de Dirichlet.

17.4 Exercícios propostos

1) Investigue a convergência das séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

2) Investigue a convergência das séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

3) Investigue a convergência das séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+k^2}\right)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$.

4) Investigue a convergência absoluta e condicional para as séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{m^{p+\frac{1}{2}}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

5) Investigue a convergência das séries e estabeleça o seu carácter (isto é convergência absoluta, condicional):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{3n-1}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n-1}}{n^2+n+1}$.

6) Seja

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q}$$

uma função racional, onde $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$ e $|b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q| > 0$, para $x \geq n_0$. Investigue a convergência absoluta e convergência condicional da série $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$.

□

Bibliografia

[1] M. J. Alves, E. V. Alves, *Integral Definido*, DMI, Maputo, 1991.

[2] M. J. Alves, E. V. Alves, *Séries Numéricas*, DMI, Maputo, 1993.

[3] M. J. Alves, *Elementos de Análise Matemática. Parte I*, DMI, Maputo, 2000.

[4] P. E. Danko, A. G. Popov, *Matemática Superior. Exercícios e Problemas*, Editora "Visha Shkola", Kiev, 1974.

[5] B. P. Demidovitch, *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Mir, Moscovo, 1978.

[6] I. I. Liashko, A. K. Boiartshuk, Ia. G. Gaĭ, G. P. Golovatsh, *Análise Matemática. Exemplos e Problemas*, Editora "Visha Shkola", Kiev, 1977.

Soluções

Módulo 1. Continuidade e continuidade uniforme

1.

a) É contínua

b) É descontínua

c) É contínua

d) É descontínua no ponto $x = 0$

e) É contínua se $a = 0$ e descontínua se $a \neq 0$

2.

a) $x = -2$ e $x = -1$ são pontos de descontinuidade de segunda espécie

b) $x = 0$ é ponto de descontinuidade evitável; os pontos $x = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ são pontos de descontinuidade de segunda espécie

c) $x = 0$ é ponto de descontinuidade evitável

3.

a) $x = -1$ é ponto de descontinuidade de primeira espécie

b) $x = 1$ é ponto de descontinuidade tipo degrau

4.

a) $f(0) = 0$

b) $f(0) = 0$

6. Não é uniformemente contínua

7. É uniformemente contínua

8. Não é uniformemente contínua

9.

a) $\delta = \varepsilon^2 \quad (\varepsilon \leq 1)$

b) $\delta = \varepsilon/3$

c) $\delta = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$

10.

a) $\omega_f(\delta) \leq \delta\sqrt{2}$

b) $\omega_f(\delta)\sqrt{\delta}$

Módulo 2. Derivada e diferencial. Regras de derivação

1. $\Delta x = 0.005, \quad \Delta y = e^{1.005} - e$

2. $\Delta x = -0.009, \quad \Delta y = 990000$

3.

a) 0

b) $\Delta y = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2$

c) $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$

5.

a) 0

b) $3x^2$

c) $-\dfrac{1}{x^2}$

d) $-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}$

e) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $f'(1) = -8, \quad f'(2) = f'(3) = 0$

7. 4

8. $1 + \dfrac{\pi}{4}$

9. $f'(a)$

11.

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3x^2$

b) $x^2 + x - 2$

c) $10a^3x - 5x^4$

d) $2x - a - b$

e) $\dfrac{a}{a+b}$

f) $2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$

g) $x \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$

h) $mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$

i) $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1 + 6x + 15x^2 + 14x^3)$

j) $-\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{9}{x^4}\right), \quad x \neq 0$

12.

a) $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$

b) $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$

c) $\dfrac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$

d) $\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$

e) $-\dfrac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{1+q}}$

f) $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$

g) $\dfrac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\,\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$

h) $\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

i) $-\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

j) $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

k) $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

l) $-2\cos x(1+2\sin x)$

m) $x^2\sin x$

n) $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$

o) $n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$

p) $\cos x\cos(\sin x)\cos[\sin(\sin x)]$

q) $\dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2 - x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$

r) $-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$

s) $\dfrac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$

t) $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$

u) $\dfrac{2}{\sin^2 x}$
v) $-2xe^{-x^2}$
w) $\dfrac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$
x) x^2e^x
y) $x^2e^{-x}\sin x$

13.
a) $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$
b) $-\dfrac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$
c) $e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^x})]$
d) $\left(\ln\dfrac{a}{b} - \dfrac{a-b}{x}\right)\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$
e) $\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$
f) $\dfrac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$
g) $\dfrac{x}{x^4-1}$
h) $\dfrac{1}{3x^2-2}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
j) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
k) $\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$
l) $\dfrac{1}{a-bx^2}$
m) $\dfrac{1}{\sin x}$
n) $\dfrac{1}{\cos x}$
o) $-\operatorname{ctg}^3 x$
p) $-\dfrac{1}{\cos x}$
q) $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$
r) $\dfrac{1}{x^5}\ln x$
s) $-\dfrac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{(1+x\ln\frac{1}{x})[1+x\ln(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x})]}$
t) $2\sin(\ln x)$

14.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

c) $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$

d) $\dfrac{2ax}{x^4+a^2}$

e) $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

f) $\operatorname{sign}(\cos x)$

g) $\dfrac{2\operatorname{sign}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

h) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$

i) $\dfrac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $\dfrac{1}{1+x^2}$

k) 1

l) $-\dfrac{2\operatorname{sign} x}{1+x^2}$

m) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$

n) $\dfrac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$

o) $\dfrac{1}{x^3+1}$

p) $(\arcsin x)^2$

15.

a) $\dfrac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

b) $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

c) $\dfrac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$

d) $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

e) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

16.

a) $\dfrac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arctg} x$

b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

c) $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

d) $\dfrac{\sin a \operatorname{sign}(\cos x - \cos a)}{1-\cos a\cos x}$

e) $\dfrac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$

f) $2x[\operatorname{sign}(\cos x^2)+\operatorname{sign}(\sin x^2)]$

g) $1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$

h) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}2x-\ln\sin x)-(\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}2x-\ln\cos x)$

17.

a) $\dfrac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$

c) $\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $\dfrac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$

18.

a) $\dfrac{\phi(x)\phi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\phi^2(x)+\psi^2(x)}}$

b) $\dfrac{\phi'(x)\psi(x)-\phi(x)\psi'(x)}{\phi^2(x)+\psi^2(x)}$

c) $\sqrt[\phi(x)]{\psi(x)}\left\{\dfrac{1}{\phi(x)}\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\dfrac{\phi'(x)}{\phi^2(x)}\ln\psi(x)\right\}$

d) $\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\dfrac{1}{\ln\phi(x)}-\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}\ln\dfrac{\psi(x)}{\ln^2\phi(x)}$

19.

a) $2xf'(x^2)$

b) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$

c) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f'(x)f(e^x)]$

d) $f'(x)f'[f(x)]f'\{f[f(x)]\}$

20.

a) $n>0$

b) $n>1$

c) $n > 2$

21. $f'_-(a) = -\phi(a), \quad f'_+(a) = \phi(a)$

22.

a) Não é diferenciável no ponto $x = 1$

b) Não é diferenciável nos pontos $x = \dfrac{2k-1}{2}\pi$, k é inteiro

c) Não é diferenciável no ponto $x = -1$

23. $a = 2x_0, \quad b = -x_0^2$

24. $y = A(x-a)(x-b)(x-c)$, $A = \dfrac{k_1 + k_2}{(b-a)^2}$, $c = \dfrac{ak_2 + bk_1}{k_1 + k_2}$

25. $a = \dfrac{3m^2}{2c}, \quad b = -\dfrac{m^2}{2c^3}$

28.

a) $\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$

b) $y'_x = -1$

c) $y'_x = -\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$

d) $y'_x = -\operatorname{tg} t$

e) $y'_x = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$

29.

a) $y' = \dfrac{1-x-y}{x-y}$

b) $y' = \dfrac{p}{y}$

c) $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

d) $y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

e) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

30.

a) $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

b) $df(1) = \Delta x$

31.

a) $(1+x)e^x dx$

b) $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

32.

a) $vwdu + uwdv + uvdw$

b) $-\dfrac{udu+vdv}{\sqrt{(u^2+v^2)^3}}$

c) $\dfrac{vdu-udv}{u^2+v^2}$

33. $1-4x^3-3x^6$
34. Aumentará em 104.7
35. 1.007

Módulo 3. Interpretação geométrica e mecânica da derivada

1. $k_1=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}; \quad k_2=4$
2. 4.01
3. 210.05
4.

a) $y=\sqrt[3]{4}(x+1); \quad y=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$

b) $y=3; \quad x=2$

c) $x=3; \quad y=0$

5. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{4}\right); \quad (0,2)$
6. $\dfrac{\pi}{4}$
7. $\dfrac{\pi}{2}$
9. $b^2-4ac=0$
11. $3x-2y=0$
12.

a) $3x+5y-50=0; \quad 5x-3y-10.8=0$

b) $x+2y-3=0; \quad 2x-y-1=0$

13. 8
14. 10π
15. 24

Módulo 4. Derivadas e diferenciais de ordem superior

1.

a) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

b) $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x$

2.

a) $2(uu''+u'^2)$

b) $\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$

c) $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{\sqrt{(u^2+v^2)^3}}$

3.

a) $8x^3 f'''(x^2)+12xf''(x^2)$

b) $-\dfrac{1}{x^6}f'''(1/x)-\dfrac{6}{x^5}f''(1/x)-\dfrac{6}{x^4}f'(1/x)$

c) $\dfrac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$

4.

a) $\dfrac{dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}$

b) $\dfrac{2\ln x-3}{x^3}dx$

c) $x^x[(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x}]dx^2$

6.

a) $ud^2v+2dudv+vd^2u$

b) $u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2du^2+2mnuvdudv+n(n-1)u^2dv^2]+uv(mvd^2u+nud^2v)\}$

c) $\dfrac{(vd^2u-ud^2v)-2dv(vdu-udv)}{v^2}$

d) $[-2uvdu^2+2(u^2-v^2)dudv+2uvdv^2+(u^2+v^2)(vd^2u-ud^2v)]\times(u^2+v^2)^{-2}$

7.

a) $\dfrac{3}{4(1-t)}$

b) $\dfrac{1}{f''(t)}$

8. $y^{(6)}=4\cdot 6!,\quad y^{(7)}=0$

9. $-\dfrac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$

10. $2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$

11. $\dfrac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$

12. $e^x\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$

13.

a) $120dx^5$

b) $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)dx^{10}$

c) $e^x\left(\ln x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}-\dfrac{6}{x^4}\right)dx^4$

Módulo 5. Teoremas sobre funções diferenciáveis

1.

a) cresce para $x \in (-b/2a, +\infty)$, decresce para $x \in (-\infty, -b/2a)$

b) $f(x)$ é crescente em todo o seu domínio

3. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$

4. $a + \dfrac{x}{ma^{m-1}} - \dfrac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2)$

5. $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{8x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

7.

a) $|R(x)| < \dfrac{3}{(n+1)!}$

b) $|R(x)| < \dfrac{1}{3840}$

c) $|R(x)| < 2 \cdot 10^{-6}$

d) $|R(x)| < \dfrac{1}{16}$

8. $|x| < 0.222$

9.

a) 3.1072

b) 1.64872

c) 0.309017

d) 0.182321

10. 2.718281828

11. 2.2361

12.

a) a/b

b) 2

c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

Módulo 6. Esquema geral de estudo de uma função

1.

a) máximo $y = 9/4$ quando $x = 1/2$

b) Não tem extremos

c) mínimo $y = 0$ quando $x = 0$

2.

a) mínimo $y \approx -0.76$ quando $x = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$, máximo $y = 0$ quando $x = 1$, mínimo $y \approx -0.05$ quando $x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$, não há extremos quando $x = 2$

b) máximo $y = 2$ quando $x = 1$, mínimo $y = -2$ quando $x = -1$

c) mínimo $y = -\dfrac{1}{24}$ quando $x = 7/5$

d) mínimo $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$ quando $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, máximo $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$ quando $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

3.

a) mínimo $y = 0$, máximo $y = 132$

b) mínimo $y = 1$, máximo $y = 3$

4.

a) $\inf f = 0$, $\sup f = 100/e$

b) $\inf f = 0$, $\sup f = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})$

c) $\inf f = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\exp(-3\pi/4)$, $\sup f = 1$

6. $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$

7. $\alpha = \arccos\dfrac{q}{p}$ se $\arccos\dfrac{q}{p} \geq \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$; $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$ se $\arccos\dfrac{q}{p} < \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$

Módulo 7. Primitiva e integral indefinido

1. $\dfrac{625x^3}{3} - 125x^4 + 30x^5 - \dfrac{10x^6}{3} + \dfrac{x^7}{7} + C$

2. $x - \dfrac{1}{x} - 2\ln|x| + C$

3. $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x}$

4. $-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3x^2}{5} + \dfrac{x^3}{8}\right)$

5. $-x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

6. $\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$

7. $-\dfrac{2}{\ln 5}(1/5)^x + \dfrac{1}{5\ln 2}(1/2)^x$

8. $-x - \operatorname{ctg}x$

Módulo 8. Métodos de integração

1. $\dfrac{1}{22}(2x-3)^{11}$

2. $-\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{(1-3x)^3}$

3. $-\dfrac{1}{4}\ln|3-2x^2|$

4. $\frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right|$
5. $\ln(2 + e^x)$
6. $-\ln(e^{-x} + \sqrt{1 + e^{-2x}})$
7. $\ln|\ln(\ln x)|$
8. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$
9. $\ln|\sin x|$
10. $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2}$
11. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2} \sin x)$
12. $\ln \left| \mathrm{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$
13. $-\frac{1}{\arcsin x}$
14. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$
15. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 3} \right|$
16. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$
17. $3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin 5x6$
18. $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$
19. $\frac{1}{3} \mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5} \mathrm{tg}^5 x$
20. $\frac{x^{n+1}}{n + 1} \left(\ln x - \frac{1}{n + 1} \right)$
21. $-\frac{e^{-2x}}{2} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right)$
22. $-\frac{2x^2 - 1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$
23. $x \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$
24. $2(6 - x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2 - x) \sin \sqrt{x}$
25. $\frac{(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x}$

Módulo 9. Integração de funções racionais, irracionais e trigonométricas

1.

a) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x + 2)^4}{(x + 1)(x + 3)^3} \right|$

b) $\dfrac{x^9}{9}-\dfrac{x^8}{8}+\dfrac{3x^7}{7}-\dfrac{5x^6}{6}+\dfrac{11x^5}{5}-\dfrac{21x^4}{4}+\dfrac{43x^3}{3}-\dfrac{85x^2}{2}+171x+\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{1024(x+2)}\right|$

c) $x+\dfrac{1}{6}\ln|x|-\dfrac{9}{2}\ln|x-2|+\dfrac{28}{3}\ln|x-3|$

d) $-\dfrac{1}{5(x-1)}+\dfrac{1}{50}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\dfrac{8}{25}\mathrm{arctg}(x+1)$

2. $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}-\dfrac{3}{2\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\dfrac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$

3. $\dfrac{3t^4}{4}-\dfrac{3t^2}{2}-\dfrac{2}{4}\ln|t-1|+\dfrac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\dfrac{27}{8\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{7}},\quad t\overset{\text{def}}{=}\sqrt[6]{x+1}$

4. $-\dfrac{(3-2x)}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$

5. $-\dfrac{(19+5x+2x^2)}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$

6. $\ln\left|\dfrac{t-1}{t}\right|-2\mathrm{arctg}t$, onde $t\overset{\text{def}}{=}\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$

7. $\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{3}[(t-1)^3+(t-1)^{-3}]+[(t-1)^2-(t-1)^{-2}]+[(t-1)+(t-1)^{-1}]\right\}+\dfrac{1}{2}\ln|t-1|$, onde $t\overset{\text{def}}{=}x+\sqrt{2-2x+x^2}$

Módulo 11. Fórmula de Newton-Leibniz

1.

a) $\dfrac{45}{4}$

b) $\dfrac{\pi}{3}$

c) 1

d) $\dfrac{\pi}{2|ab|}$

5. $t/2$

6.

a) 1

b) $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8.

a) $\dfrac{\ln 3}{2}-\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

b) $-66\dfrac{6}{7}$

c) $-\dfrac{\pi}{3}$

d) $2\pi\sqrt{2}$

e) $\dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{\pi}{4}$

f) $\dfrac{3(e^\pi - 1)}{5}$

9.

a) $I_n = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$, se $n = 2k$; $I_n = \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, se $n = 2k+1$

b) $I_n = 2^{2n} \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

Módulo 12. Teoremas de valor médio

1. $-\dfrac{2\pi}{3}$
2. $\dfrac{1}{3}$
3. $\dfrac{\cos\psi}{2}$
5. $-\dfrac{1}{10} < I \leq \dfrac{1}{10}$
6. $\dfrac{\pi}{16} \leq I \leq \dfrac{\pi}{10}$
7. Positivo
8. Positivo
9. O segundo

Módulo 13. Integrais impróprios

1.

a) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\pi}{2}$

c) 0

d) $\dfrac{b}{a^2 + b^2}$

2.

a) 1

b) 1

3.

a) Converge se $1 < n < 2$;

b) Converge se $m > -2,\ n - m > 1$

c) Converge se $\min(p, q) < 1,\ \max(p, q) > 1$

d) Converge

e) Converge

f) Converge se $p > 1,\ q < 1$

g) Converge se $p > 1,\ r < 1$ e q qualquer

h) Converge se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$

8. $-\ln 2$

9. π

10. 0

Módulo 14. Aplicações do integral definido

1. $\dfrac{32}{3}$
2. 12π
3. $\dfrac{1}{2}\ln 3$
4. $\dfrac{(\pi^2+4)\sqrt{\pi^2+4}-8}{3}$
5. $\dfrac{3\pi}{10}$
6. $\dfrac{61\pi}{1728}$
7. $\dfrac{\pi a^3 b}{4}$
8. $\hat{x} = \dfrac{\pi-2}{2},\ \hat{y} = \dfrac{\pi}{8}$

Módulo 15. Séries numéricas

1.

a) $\dfrac{3}{2}$

b) 3

c) $\dfrac{11}{18}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) 1

f) $\dfrac{\pi}{4}$

Módulo 16. Critérios de convergência para séries de sinal constante

1.

a) Converge

b) Converge

c) Diverge

d) Diverge

e) Diverge

f) Converge

g) Converge

h) Converge

2.

a) Converge

b) Converge

c) Converge

d) Converge

e) Diverge

3.

a) Converge

b) Converge

4.

a) Converge

b) Converge para $p + q > 1$

c) Converge para $p < q$

5.

a) Converge para $\alpha > \frac{1}{2}$

b) Converge para $a = \frac{1}{2}$

c) Diverge

d) Converge

e) Converge

f) Diverge

g) Diverge

Módulo 17. Critérios de convergência para séries de sinal arbitrário

1.

a) Converge

b) Converge

2.

a) Converge

b) Diverge

3.

a) Converge

b) Converge

4.

a) Converge absolutamente para $p > 1$ e converge condicionalmente para $0 < p \leq 1$

b) Converge condicionalmente

5.

a) Diverge

b) Converge condicionalmente

Índice remissivo